Эта статья опубликована в сборнике: Труды Международной конференции «Проблемы гармонии, симметрии и золотого сечения в природе, науке и искусстве», Винница, 2003г, стр.161-169. Сборник научных трудов Винницкого государственного аграрного университета, вып. 15, Винница, 2003г.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД И ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЦЫ ФИБОНАЧЧИ

С.В.Петухов

Отдел биомеханики Института машиноведения РАН
Россия, Москва, М. Харитоньевский пер., д.4
электронный адрес: petoukhov@hotmail.com

Аннотация. Доклад посвящен обобщению известных Q-матриц Фибоначчи на случай матриц произвольного четного порядка (2Кх2К). Это обобщение было получено автором в ходе изучения симметрологических свойств общебиологической системы генетического кодирования, позволившего построить октетную бипериодическую таблицу генетического кода [1-6]. Анализ биологически содержательных вариантов октетных G_i-матриц этой таблицы выявил ранее неизвестный вид связи генетического кода с числами Фибоначчи. Эти результаты входят составной частью в «генетическую алгебру», разрабатываемую автором на основе генетических мозаико-инвариантных матриц и их тензорных композиций.

Рядом Фибоначчи называется ряд чисел (F_n), соседние члены которого связаны между собой рекуррентной последовательностью

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \ \ldots \ . \qquad (1)$$

При первых двух числах ряда $F_0=0$ и $F_1=1$ этот ряд представляет собой последовательность: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … .

Рассмотрим три вида октетных матриц G_i (i = 1, 2, 3), которые получены в результате анализа бипериодической таблицы генетического кода [1-6] в связи с объективно существующими особенностями этого кода, а потому называются автором генетическими G_i-матрицами Фибоначчи:

G_1=

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

G_2=

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0

G_3=

1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0

Детерминанты этих G_i-матриц равны нулю, а их ранг равен 2.

Генетические матрицы Фибоначчи G_i имеют очевидный блочный характер, причем для G_3 повторяющийся матричный блок имеет порядок (2x2), для G_2 – порядок (4x4), для G_1 – порядок (8x8). Поэтому для сокращения записи будем применять для этих матриц условное обозначение, указывая в скобках только содержание регулярно повторяющегося блока:

$$G_i = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

Связь G_i-матриц с числами Фибоначчи проявляется в том, что при возведении G_i-матрицы в любую целочисленную степень n все ее ячейки (точнее, все ячейки ее повторяющихся блоков) заполняются закономерным образом тройкой чисел Фибоначчи F_{n-1} , F_n , F_{n+1} , помноженных на коэффициент $4^{(n-1)}$:

$$(G_i)^n = 4^{(n-1)} * \left(\begin{array}{c|c} F_{n+1} & F_n \\ \hline F_n & F_{n-1} \end{array} \right)$$

Например,

$(G_2)^7 = \quad 4^6 *$

21	21	13	13	21	21	13	13
21	21	13	13	21	21	13	13
13	13	8	8	13	13	8	8
13	13	8	8	13	13	8	8
21	21	13	13	21	21	13	13
21	21	13	13	21	21	13	13
13	13	8	8	13	13	8	8
13	13	8	8	13	13	8	8

Для этих матриц справедливо рекуррентное соотношение, напоминающее рекуррентную формулу (1) для чисел Фибоначчи, но с весовыми коэффициентами у слагаемых:

$$4^{[1-(n+2)]} * (G_i)^{n+2} = 4^{[1-(n+1)]} *(G_i)^{n+1} + 4^{(1-n)}* (G_i)^n \qquad (2)$$

Для них выполняются с небольшой коррекцией многие формулы из известной теории Q-матрицы Фибоначчи, имеющей второй порядок (2х2). Фрагменты данной теории опубликованы в различных номерах журнала «The Fibonacci Quarterly» (см., например, [7]). Сведения о Q-матрице представлены также в Интернете в содержательном музее А.П.Стахова о золотом сечении и числах Фибоначчи http://www.goldenmuseum.zibys.com/ . Именно по материалам этого музея и публикациям А.П.Стахова автор настоящей статьи познакомился с Q-матрицей Фибоначчи, которая представляет собой простейшую квадратную матрицу размером 2×2 следующего вида:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det Q = -1$$

Связь Q-матрицы с числами Фибоначчи проявляется при ее возведении в произвольную целочисленную степень n:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

где F_{n-1} , F_n , F_{n+1} - числа Фибоначчи. Очевидно, что описанные октетные G_i-матрицы являются обобщением Q-матрицы. (Добавим, что ценные материалы к проблеме фибоначчиевых матриц дает также семейство матриц, генерируемое возведением этой Q-матрицы в степень в смысле тензорного произведения; свойства данного семейства систематизируются в настоящее время).

Интересные результаты дало исследование перемножения генетических G_i-матриц Фибоначчи в степени n на октетный вектор случайных чисел (x_1, x_2, …, x_8), имеющих значения от нуля до единицы. Это исследование было проведено автором с помощью общеизвестной компьютерной программы MatLab и генерируемых ею векторов и матриц названных случайных чисел. Выяснилось, что указанное перемножение приводит к октетному вектору, имеющему всего два значения своих компонент: его четыре компоненты имеют одно значение, а другие его четыре компоненты – некоторое другое значение. Причем отношения этих двух значений компонент при росте степени n стремятся к величине золотого сечения, что легко доказать аналитически. Например, для случая G_1-матрицы такими двумя значениями компонент являются следующие величины: $a = [F_{n+2}*(x_1+x_2+x_3+x_4)+ F_{n+1}*(x_5+x_6+x_7+x_8)]$, $b = [F_{n+1}*(x_1+x_2+x_3+x_4)+ F_n*(x_5+x_6+x_7+x_8)]$. При этом распределение данных двух величин “a” и “b” по восьми компонентам итогового октетного вектора зависит от индекса G_i-матрицы следующим образом:

$$G_1 * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} а \\ а \\ а \\ а \\ в \\ в \\ в \\ в \end{vmatrix}; \quad G_2 * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} а \\ а \\ в \\ в \\ а \\ а \\ в \\ в \end{vmatrix}; \quad G_3 * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} а \\ в \\ а \\ в \\ а \\ в \\ а \\ в \end{vmatrix}$$

Другими словами, результирующий октетный вектор имеет упорядоченный «ежик» своих компонент, величины которых «а» и «в» могут чередоваться в той или иной из указанных последовательностей. Аналогичное сведение к октетному вектору всего с двумя значениями компонент, связанных в пределе при росте степени n отношением золотого сечения, справедливо для случая исходного октетного вектора с компонентами не только в виде случайных чисел, но также в виде широкого класса случайных функций с произвольной зависимостью от времени, комплексных чисел, символов матриц и пр.

Умножение октетной G_i-матрицы в возрастающей степени n на октетную матрицу случайных чисел приводит к не случайным, а упорядоченным матрицам, состоящим только из 16 различных чисел. У этих упорядоченных матриц все восемь строк разделены на два набора по четыре одинаковых строки, а все столбцы различны. Но каждый столбец состоит из двух четверок элементов с одинаковыми по величине числами в каждой четверке (т.е. в каждом столбце фигурирует всего два различных числа), причем эти два числа в каждом столбце взаимосвязаны по своей величине так, что величина их отношения стремится к величине золотого сечения при стремлении n к бесконечности. Например, генерировав в программе МатЛаб указанную ниже октетную матрицу случайных чисел T и рассмотрев произведение матриц G_1*T, автор получил следующий результат:

T =	0.8214	0.9355	0.1389	0.4451	0.8381	0.3046	0.3784	0.8180
	0.4447	0.9169	0.2028	0.9318	0.0196	0.1897	0.8600	0.6602
	0.6154	0.4103	0.1987	0.4660	0.6813	0.1934	0.8537	0.3420
	0.7919	0.8936	0.6038	0.4186	0.3795	0.6822	0.5936	0.2897
	0.9218	0.0579	0.2722	0.8462	0.8318	0.3028	0.4966	0.3412
	0.7382	0.3529	0.1988	0.5252	0.5028	0.5417	0.8998	0.5341
	0.1763	0.8132	0.0153	0.2026	0.7095	0.1509	0.8216	0.7271
	0.4057	0.0099	0.7468	0.6721	0.4289	0.6979	0.6449	0.3093

G_1*T =	4.9155	4.3901	2.3772	4.5077	4.3915	3.0631	5.5485	4.0216
	4.9155	4.3901	2.3772	4.5077	4.3915	3.0631	5.5485	4.0216
	4.9155	4.3901	2.3772	4.5077	4.3915	3.0631	5.5485	4.0216
	4.9155	4.3901	2.3772	4.5077	4.3915	3.0631	5.5485	4.0216

2.6735	3.1563	1.1442	2.2616	1.9185	1.3699	2.6856	2.1099
2.6735	3.1563	1.1442	2.2616	1.9185	1.3699	2.6856	2.1099
2.6735	3.1563	1.1442	2.2616	1.9185	1.3699	2.6856	2.1099
2.6735	3.1563	1.1442	2.2616	1.9185	1.3699	2.6856	2.1099

$G_1^5 * T =$ 1.0e+003 *

8.3450	8.0433	3.9216	7.5067	7.0945	4.9729	9.1646	6.7680
8.3450	8.0433	3.9216	7.5067	7.0945	4.9729	9.1646	6.7680
8.3450	8.0433	3.9216	7.5067	7.0945	4.9729	9.1646	6.7680
8.3450	8.0433	3.9216	7.5067	7.0945	4.9729	9.1646	6.7680
5.1439	4.9876	2.4115	4.6198	4.3549	3.0539	5.6362	4.1688
5.1439	4.9876	2.4115	4.6198	4.3549	3.0539	5.6362	4.1688
5.1439	4.9876	2.4115	4.6198	4.3549	3.0539	5.6362	4.1688
5.1439	4.9876	2.4115	4.6198	4.3549	3.0539	5.6362	4.1688

Отношения двух видов чисел в каждом из восьми столбцов последней матрицы приближаются к значению золотого сечения и равны соответственно 1,622; 1,613; 1626; 1,625; 1,629; 1,628; 1,6260; 1,6235.

Изменение порядка этих перемножаемых матриц меняет итоговую матрицу так, что по отношению к описанному типу упорядоченности строки и столбцы меняются местами.

Подробное изложение полученных результатов авторского исследования упорядочивающих и иных свойств обобщенных фибоначчиевых G_i-матриц выходит за рамки настоящей публикации. Эти результаты являются составной частью развиваемых автором «генетической алгебры» и «матричной механики развития», базирующихся на анализе свойств биологической системы генетического кодирования и включающих следующие элементы:

1) матрицу (2x2) из символов C, A, U, G четырех азотистых оснований генетического кода, а также семейства матриц, которые образованы ее тензорными композициями (кронекеровыми возведениями в степень) и содержат, например, бипериодическую таблицу 64 генетических триплетов в качестве третьей тензорной степени данной матрицы.
2) частные случаи этой базовой матрицы (2x2) и порождаемых ею семейств, связанные с бинарными субалфавитами генетического кода, при которых с учетом бинарно-оппозиционных биохимических признаков азотистых оснований кода реализуется распадение четырехбуквенного алфавита генетического кода на пары эквивалентных букв, например, C=G, A=U, и т. д.; этим случаям соответствуют семейства матриц с особо интересными математическими свойствами мозаико-инвариантности, упорядочивания, порождения новых мозаико-инвариантных матриц и т.д.;
3) деревья или иерархии из мозаико-инвариантных матриц для моделирования биологических и иных природных систем, и пр.

Добавим к пункту 1, что в силу описанного в работах [1-6] параллелизма между бипериодической таблицей 64 генетических триплетов и известной таблицей 64 гексаграмм из древнекитайской «Книги перемен», автором обнаружено следующее. Эта таблица 64 гексаграмм представима в виде третьей степени - в смысле тензорного произведения - матрицы порядка (2x2), составленной из бинарных символов 11, 10, 01, 00 так называемых молодых и старых инь и ян, фигурирующих в этой древнекитайской системе.

Фибоначчиевы G_i-матрицы возникли из анализа приводимой ниже бипериодической октетной таблицы 64 триплетов генетического кода [1- 6] в связи с так называемыми генетическими «бинарными субалфавитами второго типа». Один из важных случаев таких субалфавитов дает для четырех азотистых оснований генетического кода следующие их бинарные выражения: C=A=U=1, G=0. Именно этот случай обратил внимание на реализацию фибоначчиевых G_i-матриц в системе генетического кода. Покажем эту реализацию. Заменим во всех 64 триплетах этой таблицы каждую из букв ее указанным бинарным символом. Тогда, например, вместо триплета UGA получим бинарное число 010. Если теперь рассмотреть по отдельности числовые октетные матрицы, соответствующие бинарным числам в первой позиции каждого триплета, затем во второй позиции каждого триплета, а затем в третьей позиции, то получим рассмотренные в начале статьи октетные фибоначчиевы матрицы G_1, G_2, G_3 .

Биопериодическая таблица генетического кода.

	111 **CHYAN**	110 **TUI**	101 **LI**	100 **CHEN**	011 **HSUN**	010 **KAN**	001 **KEN**	000 **KUN**
111 CHYAN	**CCC** 63	**CCA** 62	**CAC** 61	**CAA** 60	**ACC** 59	**ACA** 58	**AAC** 57	**AAA** 56
110 TUI	**CCU** 55	**CCG** 54	**CAU** 53	**CAG** 52	**ACU** 51	**ACG** 50	**AAU** 49	**AAG** 48
101 LI	**CUC** 47	**CUA** 46	**CGC** 45	**CGA** 44	**AUC** 43	**AUA** 42	**AGC** 41	**AGA** 40
100 CHEN	**CUU** 39	**CUG** 38	**CGU** 37	**CGG** 36	**AUU** 35	**AUG** 34	**AGU** 33	**AGG** 32
011 SUN	**UCC** 31	**UCA** 30	**UAC** 29	**UAA** 28	**GCC** 27	**GCA** 26	**GAC** 25	**GAA** 24
010 KAN	**UCU** 23	**UCG** 22	**UAU** 21	**UAG** 20	**GCU** 19	**GCG** 18	**GAU** 17	**GAG** 16
001 KEN	**UUC** 15	**UUA** 14	**UGC** 13	**UGA** 12	**GUC** 11	**GUA** 10	**GGC** 9	**GGA** 8
000 KUN	**UUU** 7	**UUG** 6	**UGU** 5	**UGG** 4	**GUU** 3	**GUG** 2	**GGU** 1	**GGG** 0

Поясним, что вводимые автором «бинарные субалфавиты второго типа» соответствуют для генетического кодирования той ситуации, при которой каждое из четырех азотистых оснований кода A, C, U, G характеризуется по наличию или отсутствию в нем сразу двух признаков из списка объективно существующих их бинарно-оппозиционных признаков (а не одного признака, как в случае субалфавитов первого типа, опубликованных ранее [1-3]). Например, если буква кода обладает хотя бы одним из двух признаков – аминомутируемости и пиримидиновости - , то она характеризуется символом 1, в противном случае – символом 0. При таком объединении признаков получаем упомянутый случай, при котором C=U=A=1, G=0. Данный подход в целом дает следующую таблицу.

Таблица бинарных субалфавитов второго типа по парному объединению признаков:

Парное объединение признаков	**G**	**A**	**U**	**C**
Аминомутируемость и пиримидиновость	O	1	1	1
Пиримидиновость и комплементарность по 3 водородным связям	1	0	1	1
Аминомутируемость и комплементарность по 3 водородным связям	1	1	0	1

Изложение материалов о последовательном использовании субалфавитов второго типа при анализе системы генетического кодирования выходит за рамки настоящей статьи.

G_i-матрицы представляют собой частный случай «мозаико-инвариантных» матриц [4]. Последние определяются автором как матрицы, в которых количество видов чисел меньше числа ячеек матрицы и возведение в степени которых приводит к матрицам с тем же количеством видов чисел и с теми же мозаиками (видовыми рисунками) распределения отдельных видов чисел в ячейках матриц (в исходных G_i-матрицах первой степени подразумевается, что числа «1» из ряда Фибоначчи в них следует различать по тому, представляют они фибоначчиево число $F_1=1$ или фибоначчиево число $F_2=1$). Подобные мозаико-инвариантные матрицы реализуются в нескольких основных вариантах в системе элементов генетического кодирования в связи с бинарными субалфавитами и бинарными языками генетического кода.

Рассмотренные октетные G_i-матрицы в свою очередь могут быть обобщены на случай квадратных F_i-матриц (2Кх2К) произвольного четного порядка (К = 1, 2, 3, …). Эти фрактальные матрицы сколь угодно высокого порядка также, как G_i-матрицы, носят блочный характер и могут быть представлены условной формулой

$$(F_i)^n = K^{(n-1)} * \left(\begin{array}{c|c} F_{n+1} & F_n \\ \hline F_n & F_{n-1} \end{array} \right)$$

Для них справедливо соотношение, аналогичное соотношению (2) для G_i-матриц, а также обобщение многих других свойств G_i-матриц и Q-матрицы Фибоначчи.

Добавим еще, что формально генетические G_i-матрицы Фибоначчи можно рассматривать также, как содержащие комплексные числа, например, вместо вещественного числа «1» в них исходно может фигурировать комплексное число «1+ i». Такие комплексные генетические матрицы Фибоначчи (или их обобщения) будут содержать при возведении в степень, кратную четырем, только вещественные числа, а при возведении в другие четные степени – только мнимые числа. И они всегда будут связаны с реализацией тройки соседних чисел Фибоначчи как коэффициентов вещественной или мнимой частей чисел в них (слегка замаскированной наличием того же общего множителя для всех чисел G_i-матрицы).

Генетический код и филлотаксис. В биологии давно известны так называемые законы филлотаксиса (или листорасположения), отражающие тот факт, что, например, листоорганы на побегах растений зачастую расположены регулярно и числовые характеристики этого расположения определяются числами из ряда Фибоначчи. При этом во многих растениях данные закономерности филлотаксиса представлены как на стеблях, так и на их ветвях, развивающихся позднее. Это можно моделировать на языке иерархии соответствующих мозаико-инвариантных матриц, вложенных друг в друга и развивающихся в заданном темпе (подобный подход моделирования на основе иерархий вложенных мозаико-инвариантных матриц предлагается автором для целого ряда других биологических и не биологических явлений). Данный феномен упорядочения по числам Фибоначчи наблюдается не только в растениях, но также в животных организмах и даже на уровне биологических макромолекул (обзор явлений филлотаксиса дан, например, в книге [8, глава 1]).

Автора статьи на его докладах по бинарным языкам и атрибутивной теории генетического кода часто спрашивали, имеется ли какая-либо формальная связь между бипериодической таблицей генетического кода и числами Фибоначчи или, более широко, между генетическим кодом и явлениями филлотаксиса. Настоящая статья дает положительный ответ на этот вопрос, свидетельствуя о наличии такой формальной связи.

Расположение чисел Фибоначчи в полученных обобщенных матрицах Фибоначчи различных порядков обычно образует сетку, напоминающую филлотаксисную сеть на растительных побегах, графически развернутых на плоскость. Какие максимально большие числа Фибоначчи известны в реальных биологических объектах, подчиняющихся филлотаксисным законами морфогенеза? По обширной литературе о законах филлотаксиса автору известны случаи реализации числа 233 и всех меньших чисел Фибоначчи. Это число 233 возникает при возведении генетических G_i-матриц Фибоначчи (8x8) в 12 степень. Означает ли это, что в биологических системах реализация филлотаксиса доходит только до 12-й степени генетических матриц Фибоначчи? Просьба к читателям, знающим примеры филлотаксисной реализации чисел Фибоначчи большей величины, сообщить автору об этих примерах.

Литература.

1. Petoukhov S.V. Genetic Code and the Ancient Chinese "Book of Changes" - Symmetry: Culture & Science, vol. 10, № 3-4, 1999, p. 211-226.
2. Петухов С.В. Бипериодическая таблица генетического кода и число протонов.- М., 2001, 258 с.
3. Петухов С.В. Генетический код и древнекитайская «Книга перемен» - Материалы Второй Российской междисциплинарной научной конференции «Этика и наука будущего», Москва, 15-16 февраля 2002г, ежегодник «Дельфис» 2002г., с53-58.
4. Петухов С.В. Фрактальные матрицы, генетические матрицы Фибоначчи и позиционирование в биологическом коде. Элементы матричной механики развития. - Депонировано в ВИНИТИ РАН 14.08.2003г, № 1593-В2003 (Указатель ВИНИТИ «Депонированные научные работы», № 10 за 2003г.)
5. Petoukhov S.V. The Biperiodic Table and Attributive Conception of Genetic Code. A Problem of Unification Bases of Biological Languages. - Proceedings of the 2003 International Conference on Mathematics and Engineering Techniques in Medicine and Biological Sciences. Section "Bioinformatics 2003" (METMBS'03: June 23-26, 2003, Las Vegas, Nevada, USA).
6. Petoukhov S.V. Attributive conception of genetic code, its bi-periodic table and a problem of unification bases of biological languages. - Proceedings of the International Congress "Symmetry Festival 2003", Budapest, August 16-22, 2003 (in international journal "Symmetry: Culture and Science").
7. Bicknell M. Fibonacci fantasy: the square root of the Q matrix. – The Fibonacci Quarterly, 1965, v.3, №1
8. Петухов С.В.Биомеханика, бионика и симметрия. М., Наука, 1982, 239 с.
9. Стахов А.П. Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на «Золотом сечении», 2003г.