

## МАТРИЧНАЯ ГЕНЕТИКА И ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ В БИОИНФОРМАТИКЕ

**С.В.Петухов, доктор физико-математических наук\*, Е.С.Петухова\*\***

\* - Отдел биомеханики Института машиноведения РАН, Москва,  
[petoukhov@hotmail.com](mailto:petoukhov@hotmail.com)

\*\* - Московский психолого-педагогический университет

Настоящая статья является продолжением публикаций авторов по исследованию систем генетического кода с помощью их матричного представления и анализа. Это направление исследований носит название матричной генетики. Одной из задач данного направления является раскрытие механизмов помехоустойчивости генетического кодирования на основах изучения аналогий с матричными методами обеспечения помехоустойчивости в технике цифровой связи. В статье представлены лишь некоторые из результатов, полученных авторами в области матричной генетики и свидетельствующих о связи структур генетического кода с матричными методами обеспечения помехоустойчивости и эффективности передачи информации.

### Проблема помехоустойчивости генетического кодирования и матричный подход.

Молекулярная генетика открыла, что все живые организмы имеют одни и те же основы генетического кодирования и в этом отношении неотличимы друг от друга. Другими словами, в науке произошло великое объединение живых организмов. Тот факт, что именно с информационно-наследственной точки зрения все живые организмы удивительным образом унифицированы, вызвал повышенный интерес науки к возможной информационной природе живой материи.

С информационной точки зрения, живые организмы являются информационными сущностями. Они живут потому, что получают генетическую информацию от своих предков, и существуют для того, чтобы передать генетическую информацию потомкам. В биологической литературе нередко можно встретить утверждение о том, что живые организмы являются текстами, начиная с молекулярного уровня своей организации. Представление об информационной природе живой материи отражается в словах: «Если вы хотите понять жизнь, ... то думайте об информационной технологии» [Dawkins, 1991]. Информационный подход к живой материи в последние десятилетия после открытия генетического кода постепенно занял ведущие позиции. Его значимость отражает цитата из статьи «Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики» [Чернавский, 2000], опубликованной в «Успехах физических наук»: «В физике неживой природы понятия “информации” и “ценной информации” практически не используются, поскольку они там не нужны. В биологии, напротив, понятие «информация» и особенно «ценная информация» являются основными, и без них ни понять, ни описать явления в живой природе невозможно. В этом собственно и заключается специфика «живого»». Именно с позиций биоинформатики современная наука надеется получить более глубокое понимание того, что такое жизнь и каково ее происхождение. И именно в биоинформатике закладываются сейчас основы теоретической биологии будущего.

Механизмы генетического кодирования обеспечивают высокую помехоустойчивость передачи наследственной информации от поколения к поколению, несмотря на множество помех и шумов, существующих в биологических средах. Область исследования помехоустойчивости в биологической информатике находится в самом начале своего развития. Она использует достижения современной теории помехоустойчивого кодирования, применяемой в технических системах цифровой связи, в попытках понять феномены биоинформатики. По нашему мнению, многие структурные особенности системы генетического кодирования определены именно требованием помехоустойчивости генетической информации.

Базис языка наследственной информации поразительно прост. Для записи генетических посланий дискретного характера, кодирующих белки, в рибонуклеиновых кислотах любых организмов используется «алфавит», состоящий всего из четырех «букв» или азотистых оснований: аденин (А), цитозин (С), гуанин (G), урацил (U) (в ДНК вместо урацила используется родственный ему тимин (Т)). Именно строчная последовательность этих четырех букв (или моноплетов) на нитях нуклеиновых кислот содержит генетическую информацию для синтеза белков. Как говорят, энциклопедия жизни написана четырьмя буквами. Эти буквы образуют между собой компонен-

тарные пары С-Г и А-У, поскольку в молекулах наследственности стоят напротив друг друга и связаны соответственно тремя и двумя водородными связями.

Данный набор четырех букв обычно считается элементарным алфавитом генетического кода. Генетическая информация, передаваемая молекулами наследственности (ДНК и РНК), определяет первичное строение белков живого организма. Каждый кодируемый белок представляет собой цепь из 20 видов аминокислот. Последовательность аминокислот в белковой цепи определяется последовательностью триплетов (трехбуквенных «слов»). Триплетом (или кодоном) называется блок из трех соседних азотистых оснований, расположенных вдоль нити ДНК (или РНК). Из четырехбуквенного алфавита можно составить всего  $4^3 = 64$  вида триплетов. Каждый из них имеет кодовое значение, кодируя ту или иную из 20 аминокислот или знаки начала и остановки белкового синтеза. Генетический код называется вырожденным, поскольку 64 триплета кодируют всего 20 аминокислот, и каждая аминокислота может кодироваться разным количеством триплетов. Эта вырожденность кода с момента ее открытия предполагается имеющей отношение к помехоустойчивости генетической информации.

Современной науке не известны причины того, почему алфавит генетического языка именно четырехбуквенный (а не из тридцати букв, например); почему из миллиардов возможных химических соединений именно эти четыре азотистые основания С, А, G, U(T) выбраны в качестве элементов алфавита; почему генетически кодируются именно 20 аминокислот. Наша задача – попытаться найти адекватный подход к этой проблеме и одновременно продвинуться в понимании генетической помехоустойчивости.

Проблема наследуемой помехоустойчивости является общей для всех многоканальных систем информатики организма. С генетическими молекулами связано много прикладных задач нанотехнологий и биотехнологий, например, по созданию компьютеров на ДНК [Бененсон, Шапиро, 2006]. Необходимо выявлять те особенности ансамблей генетических молекул, которые напоминают формализмы цифровой информатики, активно использующей математику матриц.

**Естественная нумерация мультиплетов.** В силу дискретного характера генетического кода естественно исследовать его с позиций современной теории дискретных сигналов. Она, в частности, эффективно решает проблемы помехоустойчивости передачи цифровой информации за счет так называемых помехоустойчивых кодов, то есть кодов, способных к выявлению и исправлению ошибок. Они появились в науке сравнительно недавно, начиная с пионерской работы [Хэмминг, 1950]. Благодаря помехоустойчивым кодам возможна надежная передача цифровой информации на миллионы километров. Математика помехоустойчивых кодов использует представление множества сигналов и кодов в виде матриц и их кронекеровских степеней. В том числе для обеспечения надежности передачи информации широко используется кронекеровское семейство матриц Адамара (1):

$$H_n = [1 \ 1; -1 \ 1]^{(n)}, \text{ где } (n) - \text{ кронекеровская степень. (1)}$$

Базовая матрица Адамара  $H_1 = [1 \ 1; -1 \ 1]$  при  $n=1$  называется ядром этого семейства матриц Адамара  $H_n$ .

Учитывая матричные методы и достижения теории цифровой связи, естественно сопоставить используемые в ней матрицы с теми родственными им матрицами, которые способны характеризовать систему генетического кода. В свете этого авторы по аналогии с (1) представляют систему четырех букв генетического алфавита в виде базовой матрицы (ядра)  $P$  порядка  $(2 \times 2)$  и исследуют семейство  $P^{(n)} = [C \ A; U \ G]^{(n)}$  генетических матриц (кратко, геноматриц), возникающее при возведении этой алфавитной матрицы-ядра в кронекеровскую степень  $(n)$  (Рис. 1). Интерес к матричному подходу дополнительно обусловлен также тем, что информация в компьютерах обычно хранится в виде матриц, а ее обработка в квантовых компьютерах ведется с помощью матриц унитарных преобразований, прежде всего нормированных матриц Адамара, выступающих в роли логических гейтов.

Системы генетического кода состоят из множеств молекулярных  $4^n$  мультиплетов: алфавит – из  $4^1$  моноплетов, система триплетов – из  $4^3$  триплетов, белки одинаковой длины  $k$  кодируются набором из  $4^{3k}$  мультиплетов. Названное семейство геноматриц  $P^{(n)}$  (Рис. 1) при достаточно большом “ $n$ ” унифицированным образом представляет всю систему кодовых мультиплетов, как кодирующих белки всех живых организмов, так и имеющих иное кодовое содержание: моноплеты генетического алфавита, являющиеся составными элементами кодовых конструкций, и триплеты, кодирующие не белки, а аминокислоты. Другими словами, само природное строение системы генети-

ческого кодирования согласовано со строением кронекеровского семейства квадратных ( $2^n \times 2^n$ )-матриц  $P^{(n)}$ .

В каждом из четырех квадрантов геноматрицы  $P^{(n)}$  собраны все  $n$ -плеты, начинающиеся с одной из четырех букв C, A, U, G. Если не обращать внимания на эту первую букву в  $n$ -плетях квадранта, то легко видеть, что квадрант матрицы  $P^{(n)}$  полностью воспроизводит матрицу  $P^{(n-1)}$  предыдущего поколения (это обусловлено свойствами кронекеровского возведения в степень). Если процесс образования в этом семействе очередных геноматриц  $P^{(n)}$  с ростом “ $n$ ” условно назвать эволюционным порождением очередного поколения геноматриц, то геноматрица каждого нового поколения в силу описанной особенности содержит в себе в скрытом виде информацию о всех предыдущих поколениях (геноматрицы с «памятью поколений»).

Четверка букв генетического алфавита по своему молекулярному строению является носителем трех пар бинарно-оппозиционных признаков, что определяет существование трех бинарно-оппозиционных субалфавитов. Их учет позволяет естественным образом пронумеровать бинарными числами все мультиплеты в кронекеровском семействе геноматриц (подробности этого см. в [Петухов, 2001]). При этом все мультиплеты оказываются расположенными строго упорядоченно по своим номерам. И вся система генов переводится на язык геометрии в пространствах сообщений по аналогии с теорией дискретных сигналов. Нумерация мультиплетов в первых трех геноматрицах семейства показана на Рис. 1.

	1	0
1	C	A
0	U	G

$$P = \begin{matrix} \underline{1} & C & A \\ \underline{0} & U & G \end{matrix}; \quad P^{(2)} = P \otimes P =$$

	11	10	01	00
<u>11</u>	CC 1111 15	CA 1110 14	AC 1101 13	AA 1100 12
<u>10</u>	CU 1011 11	CG 1010 10	AU 1001 9	AG 1000 8
<u>01</u>	UC 0111 7	UA 0110 6	GC 0101 5	GA 0100 4
<u>00</u>	UU 0011 3	UG 1110 2	GU 0001 1	GG 0000 0

	111	110	101	100	011	010	001	000
<u>111</u>	CCC 111111 63	CCA 111110 62	CAC 111101 61	CAA 111100 60	ACC 111011 59	ACA 111010 58	AAC 111001 57	AAA 111000 56
<u>110</u>	CCU 110111 55	CCG 110110 54	CAU 110101 53	CAG 110100 52	ACU 110011 51	ACG 110010 50	AAU 110001 49	AAG 110000 48
<u>101</u>	CUC 101111 47	CUA 101110 46	CGC 101101 45	CGA 101100 44	AUC 101011 43	AUA 101010 42	AGC 101001 41	AGA 101000 40
<u>100</u>	CUU 100111 39	CUG 100110 38	CGU 100101 37	CGG 100100 36	AUU 100011 35	AUG 100010 34	AGU 100001 33	AGG 100000 32
<u>011</u>	UCC 011111 31	UCA 011110 30	UAC 011101 29	UAA 011100 28	GCC 011011 27	GCA 011010 26	GAC 011001 25	GAA 011000 24
<u>010</u>	UCU 010111 23	UCG 010110 22	UAU 010101 21	UAG 010100 20	GCU 010011 19	GCG 010010 18	GAU 010001 17	GAG 010000 16
<u>001</u>	UUC 001111 15	UUA 001110 14	UGC 001101 13	UGA 001100 12	GUC 001011 11	GUA 001010 10	GGC 001001 9	GGA 001000 8
<u>000</u>	UUU 000111 7	UUG 000110 6	UGU 000101 5	UGG 000100 4	GUU 000011 3	GUG 000010 2	GGU 000001 1	GGG 000000 0

Рис. 1. Начальные представители семейства геноматриц  $P^{(n)}$  для случаев  $n = 1, 2, 3$ .  $\otimes$  - символ кронекеровского умножения. Указаны бинарные и десятичные номера дуплетов и триплетов.

Если в геноматрице  $P^{(3)}$  оставить только бинарные шестиразрядные номера ее 64 триплетов, показанные на Рис. 1, то эта геноматрица совпадет со знаменитой матрицей 64 гексаграмм в порядке Фу-си из древнекитайской «Книги перемен» («И-цзин»), написанной несколько тысяч лет назад. Эта матрица в свое время поразила изобретателя компьютера Г.Лейбница, считавшего себя создателем двоичной системы счисления и вдруг обнаружившего древних предшественников. Он увидел в особенностях данной древней матрицы многие черты сходства с волновавшими его идеями бинарных систем и универсального языка. «Лейбниц усмотрел в этом подобии ... свидетельство предустановленной гармонии и единства божьего промысла для всех времен и народов» [Щуцкий, 1997, с. 12].

Таким образом, введенная нами естественная система нумерации триплетов и занимаемых ими ячеек октетной таблицы известна уже несколько тысяч лет и вполне может называться древнекитайской системой. Матричный подход к генетическому коду, помимо фундаментальности объекта исследования и применяемой матричной математики, неожиданно выводит на исторические аналогии и проблему связи времен.

Подчеркнем, что имеется астрономическое число  $64! \approx 10^{89}$  вариантов расположения 64 триплетов в октетной матрице. Современная физика оценивает время существования Вселенной в  $10^{17}$  секунд. Получается, что если на рассмотрение каждого из этих вариантов затрачивать всего одну секунду, то за все время существования Вселенной мы успеем рассмотреть лишь ничтожную часть из этих  $10^{89}$  вариантов. Заведомо ясно, что случайная расстановка 20 аминокислот и их подсемейств триплетов в октетных матрицах этого необозримого множества вариантов почти никогда не даст никакой симметрии в их расположении. Однако, природа по какой-то причине выбрала такой вариант вырожденности генетического кода, который соответствует симметрическому, а значит закономерному заполнению данной октетной матрицы.

Обратимся к данным о вырожденности генетического кода и расположению 20 аминокислот в этой геноматрице 64 триплетов в случае генетического кода митохондрий позвоночных, который в генетике называется наиболее древним и «идеальным» [Франк-Каменецкий, 1988]. Будем обозначать три позиции в триплете в порядке их следования через X, Y, Z соответственно. Построенная геноматрица  $P^{(3)}$  для 64 триплетов структурирована так, что каждый из ее 16 субквадрантов (2x2) содержит полное семейство XY-триплетов, т.е. набор всех тех четырех триплетов, которых неотличимы друг от друга по буквам на их первых двух позициях (Рис. 1).

Важно то, что вырожденность названного кода оказывается связанной именно с 16 семействами XY-триплетов, каждое из которых занимает один из 16 субквадрантов (2x2)-геноматрицы  $P^{(3)}$  (Рис. 2, левый верхний). Множество 16 таких семейств состоит из двух равных подмножеств по 8 семейств в каждом по свойствам вырожденности кода. В первый набор входят 8 семейств «двухпозиционных» XY-триплетов, кодовое значение которых не зависит от буквы на третьей позиции в них, а потому все четыре ячейки соответствующих субквадрантов заняты одной и той же аминокислотой. Эти 8 семейств состоят из CC-, CU-, CG-, AC-, UC-, GC-, GU-, GG-триплетов, а их ячейки обозначены в матрицах генетического кода («геноматрицах») на рисунке черным цветом. Во второй набор входят 8 семейств с «трехпозиционными» XY-триплетами, кодовое значение которых зависит от буквы на третьей позиции в них, а потому обозначенные белым цветом четыре ячейки каждого из таких субквадрантов неодинаковы по аминокислотам и стоп-сигналам в них. К этим 8 семействам относятся CA-, AA-, AU-, AG-, GA-, UA-, UU-, UG-триплеты.

CCC	CCA	CAC	CAA	ACC	ACA	AAC	AAA
PRO	PRO	HIS	GLN	THR	THR	ASN	LYS
CCU	CCG	CAU	CAG	ACU	ACG	AAU	AAG
PRO	PRO	HIS	GLN	THR	THR	ASN	LYS
CUC	CUA	CGC	CGA	AUC	AUA	AGC	AGA
LEU	LEU	ARG	ARG	ILE	MET	SER	STOP
CUU	CUG	CGU	CGG	AUU	AUG	AGU	AGG
LEU	LEU	ARG	ARG	ILE	MET	SER	STOP
UCC	UCA	UAC	UAA	GCC	GCA	GAC	GAA
SER	SER	TYR	STOP	ALA	ALA	ASP	GLU
UCU	UCG	UAU	UAG	GCU	GCG	GAU	GAG
SER	SER	TYR	STOP	ALA	ALA	ASP	GLU
UUC	UUA	UGC	UGA	GUC	GUA	GGC	GGA
PHE	LEU	CYS	TRP	VAL	VAL	GLY	GLY
UUU	UUG	UGU	UGG	GUU	GUG	GGU	GGG
PHE	LEU	CYS	TRP	VAL	VAL	GLY	GLY

CCC	CAC	ACC	AAC	CCA	CAA	ACA	AAA
PRO	HIS	THR	ASN	PRO	GLN	THR	LYS
CUC	CGC	AUC	AGC	CUA	CGA	AUA	AGA
LEU	ARG	ILE	SER	LEU	ARG	MET	STOP
UCC	UAC	GCC	GAC	UCA	UAA	GCA	GAA
SER	TYR	ALA	ASP	SER	STOP	ALA	GLU
UUC	UGC	GUC	GGC	UUA	UGA	GUA	GGA
PHE	CYS	VAL	GLY	LEU	TRP	VAL	GLY
CCU	CAU	ACU	AAU	CCG	CAG	ACG	AAG
PRO	HIS	THR	ASN	PRO	GLN	THR	LYS
CUU	CGU	AUU	AGU	CUG	CGG	AUG	AGG
LEU	ARG	ILE	SER	LEU	ARG	MET	STOP
UCU	UAU	GCU	GAU	UCG	UAG	GCG	GAG
SER	TYR	ALA	ASP	SER	STOP	ALA	GLU
UUU	UGU	GUU	GGU	UUG	UGG	GUG	GGG
PHE	CYS	VAL	GLY	LEU	TRP	VAL	GLY

CCC	CCA	ACC	ACA	CAC	CAA	AAC	AAA
PRO	PRO	THR	THR	HIS	GLN	ASN	LYS
CCU	CCG	ACU	ACG	CAU	CAG	AAU	AAG
PRO	PRO	THR	THR	HIS	GLN	ASN	LYS
UCC	UCA	GCC	GCA	UAC	UAA	GAC	GAA
SER	SER	ALA	ALA	TYR	STOP	ASP	GLU
UCU	UCG	GCU	GCG	UAU	UAG	GAU	GAG
SER	SER	ALA	ALA	TYR	STOP	ASP	GLU
CUC	CUA	AUC	AUA	CGC	CGA	AGC	AGA
LEU	LEU	ILE	MET	ARG	ARG	SER	STOP
CUU	CUG	AUU	AUG	CGU	CGG	AGU	AGC
LEU	LEU	ILE	MET	ARG	ARG	SER	SER
UUC	UUA	GUC	GUA	UGC	UGA	GGC	GGA
PHE	LEU	VAL	VAL	CYS	TRP	GLY	GLY
UUU	UUG	GUU	GUG	UGU	UGG	GGU	GGG
PHE	LEU	VAL	VAL	CYS	TRP	GLY	GLY

CCC	ACC	CAC	AAC	CCA	ACA	CAA	AAA
PRO	THR	HIS	ASN	PRO	THR	GLN	LYS
UCC	GCC	UAC	GAC	UCA	GCA	UAA	GAA
SER	ALA	TYR	ASP	SER	ALA	STOP	GLU
CUC	AUC	CGC	AGC	CUA	AUA	CGA	AGA
LEU	ILE	ARG	SER	LEU	MET	ARG	STOP
UUC	GUC	UGC	GGC	UUA	GUA	UGA	GGA
PHE	VAL	CYS	GLY	LEU	VAL	TRP	GLY
CCU	ACU	CAU	AAU	CCG	ACG	CAG	AAG
PRO	THR	HIS	ASN	PRO	THR	GLN	LYS
UCU	GCU	UAU	GAU	UCG	GCG	UAG	GAG
SER	ALA	TYR	ASP	SER	ALA	STOP	GLU
CUU	AUU	CGU	AGU	CUG	AUG	CGG	AGG
LEU	ILE	ARG	SER	LEU	MET	ARG	STOP
UUU	GUU	UGU	GGU	UUG	GUG	UGG	GGG
PHE	VAL	CYS	GLY	LEU	VAL	TRP	GLY

CCC	ACC	CCA	ACA	CAC	AAC	CAA	AAA
PRO	THR	PRO	THR	HIS	ASN	GLN	LYS
UCC	GCC	UCA	GCA	UAC	GAC	UAA	GAA
SER	ALA	SER	ALA	TYR	ASP	STOP	GLU
CCU	ACU	CCG	ACG	CAU	AAU	CAG	AAG
PRO	THR	PRO	THR	HIS	ASN	GLN	LYS
UCU	GCU	UCG	GCG	UAU	GAU	UAG	GAG
SER	ALA	SER	ALA	TYR	ASP	STOP	GLU
CUC	AUC	CUA	AUA	CGC	AGC	CGA	AGA
LEU	ILE	LEU	MET	ARG	SER	ARG	STOP
UUC	GUC	UUA	GUA	UGC	GGC	UGA	GGA
PHE	VAL	LEU	VAL	CYS	GLY	TRP	GLY
CUU	AUU	CUG	AUG	CGU	AGU	CGG	AGG
LEU	ILE	LEU	MET	ARG	SER	ARG	STOP
UUU	GUU	UUG	GUG	UGU	GGU	UGG	GGG
PHE	VAL	LEU	VAL	CYS	GLY	TRP	GLY

CCC	CAC	CCA	CAA	ACC	AAC	ACA	AAA
PRO	HIS	PRO	GLN	THR	ASN	THR	LYS
CUC	CGC	CUA	CGA	AUC	AGC	AUA	AGA
LEU	ARG	LEU	ARG	ILE	SER	MET	STOP
CCU	CAU	CCG	CAG	ACU	AAU	ACG	AAG
PRO	HIS	PRO	GLN	THR	ASN	THR	LYS
CUU	CGU	CUG	CGG	AUU	AGU	AUG	AGG
LEU	ARG	LEU	ARG	ILE	SER	MET	STOP
UCC	UAC	UCA	UAA	GCC	GAC	GCA	GAA
SER	TYR	SER	STOP	ALA	ASP	ALA	GLU
UUC	UGC	AUU	AGU	CUG	CGG	GUA	GGA
PHE	CYS	ILE	SER	LEU	ARG	VAL	GLY
UCU	UAU	UCG	UAG	GCU	GAU	GCG	GAG
SER	TYR	SER	STOP	ALA	ASP	ALA	GLU
UUU	UGU	UUG	UGG	GUU	GGU	GUG	GGG
PHE	CYS	LEU	TRP	VAL	GLY	VAL	GLY

Рис. 2. Геноматрицы, различающиеся порядком позиций в триплетях, для случая генетического кода митохондрий позвоночных. Верхний ряд слева направо: геноматрицы  $P_{123}$  (слева, она же  $P^{(3)}$  из Рис.1)) и  $P_{231}$ . Средний ряд: геноматрицы  $P_{213}$  и  $P_{321}$ . Нижний ряд: геноматрицы  $P_{312}$  и  $P_{132}$ . В каждой ячейке указан триплет, его номер и кодируемая им аминокислота или стоп-сигнал белкового синтеза. Черно-белая мозаика отражает специфику вырожденности кода.

Геноматрица  $P^{(3)}$  (на Рис. 2 она обозначена как  $P_{123}$ ) оказывается симметрической мозаикой из черных и белых ячеек:

- 1) Левая и правая половины матрицы зеркально-антисимметричны по мозаике;
- 2) Пары квадрантов, расположенные вдоль любой диагонали, тождественны по их мозаике;
- 3) Мозаика всех строк носит меандровый характер и соответствует функциям Радемахера (описывается функциями, нечетными относительно средней линии).
- 4) Соседние строки в каждой из пар 1-2, 3-4, 5-6, 7-8 эквивалентны между собой по расположению в них идентичных аминокислот.
- 5) Если свернуть рисунок этой матрицы в цилиндр, срастив ее верхний и нижний края друг с другом, то в данной мозаике проявится симметрия циклического сдвига.

Данную симметрию циклического сдвига нагляднее всего можно продемонстрировать, замостив плоскость этой мозаичной матрицей как модульной единицей (Рис. 3 слева). При этом плоскость оказывается покрытой двумя видами модульных единиц, одинаковых по форме, но противоположных по цвету и ориентации. Это замощение в образном представлении напоминает две – черную и белую – стаи сов, пролетающих друг сквозь друга в духе мозаик Эшера.

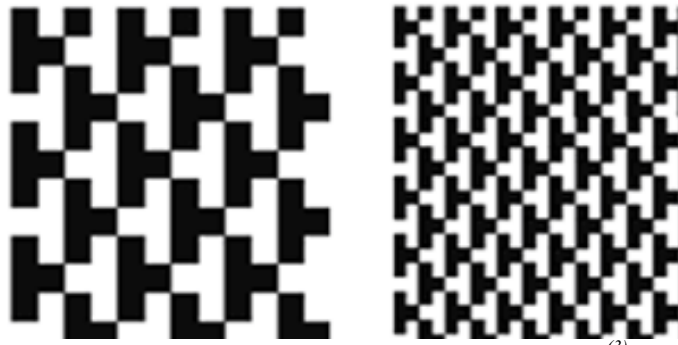


Рис.3. Слева: заощение плоскости мозаикой геноматрицы  $P^{(3)}$  (или  $P_{123}$ ) из Рис.2.  
Справа: заощение плоскости мозаикой геноматрицы  $P_{231}$ .

Симметрия циклических сдвигов в этой геноматрице  $P^{(3)}$  выводит на содержательный круг вопросов о значимости для генетической системы так называемых циклических кодов, играющих важную роль в теории кодирования информации. Не имеют ли принципы циклических сдвигов некоторого значения для структур генетического кода? Попробуем в каждой ячейке геноматрицы  $P^{(3)}$  заменить содержащийся в ней триплет с исходным порядком 1-2-3 трех позиций в нем на триплет с порядком позиций 2-3-1 с циклически сдвинутыми влево позициями. При этом, например, триплет CAG заменится на триплет AGC. В результате такой замены образуется новая геноматрица  $P_{231}$ , показанная на Рис. 2 вверху справа (индекс в символе геноматрицы обозначает относительный порядок позиций в ее триплетах).

Существенным является то, что эта «циклопорожденная» геноматрица вовсе не утратила, а даже повысила симметричность своего строения:

1) все ее квадранты одинаковы не только по черно-белой мозаике трех- и двухпозиционных триплетов, т.е. мозаике вырожденности кода, но и по аминокислотам, кодируемым черными триплетами;

2) верхняя и нижняя половины матрицы идентичны по расстановке всех аминокислот и стоп-сигналов;

3) все строки (8x8)-матрицы и ее (4x4)-квадрантов имеют меандровый характер мозаики, который соответствует нечетным функциям относительно их середины (зеркальная антисимметрия).

4) сохранилась попарная идентичность строк по составу и порядку аминокислот, только пары таких строк стали иными: 1-5, 2-6, 3-7, 4-8.

Следует отметить то, что мозаика исходной кронекеровской (8x8)-геноматрицы  $P_{123}$  фрактально воспроизводится в (4x4)-квадрантах этой геноматрицы  $P_{231}$  с коэффициентом масштабирования по площади в четыре раза. Эта фрактальность соответствия цикло-сдвиговых мозаик у геноматриц  $P_{123}$  и  $P_{231}$  особенно наглядно видна при сравнении заощений ими плоскости (Рис.3).

Такое масштабирование площадей в мозаике вырожденности кода, возникающее в результате переупаковки букв на позициях триплетов, будем условно называть тетра-масштабированием. При нем в циклопорожденной геноматрице  $P_{231}$  количество мотивных единиц мозаики в виде характерных объединений четырех смежных квадратиков белого или черного цвета («летающих сов») увеличивается в четыре раза по сравнению с исходной геноматрицей.

Это интересно потому, что аналогичное учетверение или тетра-членение реализуется в живой природе всегда при делении половых клеток – передатчиков генетической информации: в этом загадочном акте мейоза одна половая клетка делится на четыре новые половые клетки. Соответственно такое тетра-членение геноматриц может использоваться в качестве формальной модели данного биологического акта.

Коль скоро эти бинарные матрицы отражают структурные особенности генетического кода, то получается, что тетра-размножению половых клеток как вещественных объектов можно сопоставить тетра-размножение кодов, точнее тетра-размножение этих бинарных геноматриц как информационно-кодовых объектов. Значит, можно полагать, что материальный процесс размножения половых клеток не случаен, а согласован с эволюционно более древними информационными структурами генетического кода. Другими словами, можно полагать, что в данном случае информация диктует особенности материальных процессов, а материальный феномен тетра-размножения половых клеток имеет предшественников в информационном явлении тетра-размножения бинарных геноматриц.

Перестановки элементов играют важную роль в теории кодирования информации. Для триплетов возможно всего шесть вариантов перестановок позиций в них: 123, 231, 312, 132, 213, 321. Ге-

номатрицы  $P_{123}$  и  $P_{231}$  для первых двух случаев упорядоченности позиций в триплетах мы только что описали. Рассмотрим теперь, каковы четыре геноматрицы, соответствующие оставшимся четырем вариантам перестановок:  $P_{312}$ ,  $P_{132}$ ,  $P_{213}$ ,  $P_{321}$ . Оказывается, что все они также наделены похожими симметриями, что можно видеть из Рис. 2. Весь рассматриваемый генетический код как система вырожденного соответствия между 64 триплетами и 20 аминокислотами с 4 стоп-сигналами представляется согласованным с этими перестановками и сопровождающими их изменениями в симметриях мозаик вырожденности у геноматриц.

Почему природа избрала именно такой тип вырожденности генетического кода, который дает именно такие мозаики геноматриц, а не более простые? Ведь, казалось бы, можно было выбрать вырожденность, при которой мозаика геноматрицы была бы более тривиальной, например, ее левая половина была бы черной, а правая – белой. Имеется ли в этих шести «триплето-перестановочных» геноматрицах  $P_{123}$ ,  $P_{231}$ ,  $P_{312}$ ,  $P_{132}$ ,  $P_{213}$ ,  $P_{321}$  что-то такое общее, что напоминает известные биологические факты информационного наследования и что не встречается во множестве других матриц, в том числе в указанной тривиальной по мозаике матрице? Да, такое свойство у них имеется и оно вновь связано с тетра-размножением.

**Свойство тетра-размножения бинарно-мозаичных геноматриц при возведении в степень.** Представим бинарную, черно-белую мозаику каждой из шести рассмотренных геноматриц на Рис. 2 в виде бинарной мозаики чисел +1 и -1, заменяя черный цвет в ячейках элементом +1, а белый цвет – элементом -1. При этом данные геноматрицы  $P_{123}$ ,  $P_{231}$ ,  $P_{312}$ ,  $P_{132}$ ,  $P_{213}$ ,  $P_{321}$  примут вид соответствующих им геноматриц  $B_{123}$ ,  $B_{231}$ ,  $B_{312}$ ,  $B_{132}$ ,  $B_{213}$ ,  $B_{321}$ , изображенных на Рис. 4.

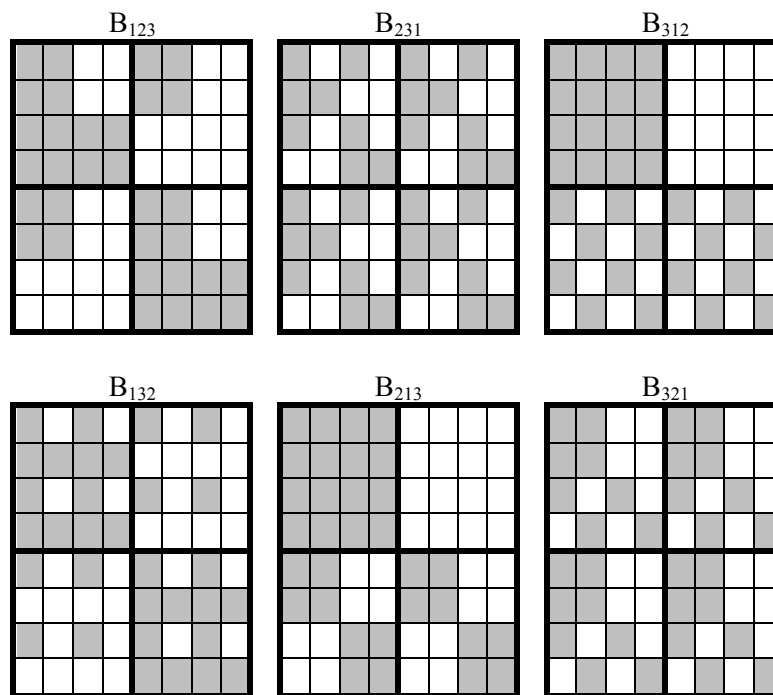


Рис. 4. Бинарные числовые геноматрицы, в которых черные ячейки соответствуют элементам «+1», а белые – «-1».

Неожиданным общим свойством каждой из этих шести бинарных числовых геноматриц на Рис. 4 является то, что при ее перемножении с самой собой она порождает саму себя, но в учетверенном количестве. Соответственно имеют место формулы:

$$\begin{aligned} (B_{123}^{\text{CAUG}})^K &= 4^{K-1} * B_{123}^{\text{CAUG}}; & (B_{231}^{\text{CAUG}})^K &= 4^{K-1} * B_{231}^{\text{CAUG}}; \\ (B_{312}^{\text{CAUG}})^K &= 4^{K-1} * B_{312}^{\text{CAUG}}; & (B_{132}^{\text{CAUG}})^K &= 4^{K-1} * B_{132}^{\text{CAUG}}; \\ (B_{213}^{\text{CAUG}})^K &= 4^{K-1} * B_{213}^{\text{CAUG}}; & (B_{321}^{\text{CAUG}})^K &= 4^{K-1} * B_{321}^{\text{CAUG}} \end{aligned}$$

Это свойство является вовсе не тривиальным, что показывает сравнение с матрицей, образованной в результате случайной расстановки в 64 ячейках октетной матрицы 32 элементов «+1» и 32 элементов «-1». Возведение такой матрицы в квадрат практически всегда приводит к матрице, в которой не только не сохраняется расстановка знаков плюс и минус во всех ячейках, но и утрачивается бинарный характер из-за появления в ней многих разных чисел в качестве ее элементов.

Набор этих шести бинарных геноматриц имеет целый ряд других интересных свойств, порождающих ассоциации с генетическими феноменами и выявляющихся, например, при их перемножении друг с другом, но они не рассматриваются в этой статье. Выявление содержательной симметрологической группы из шести триплето-перестановочных геноматриц интересно еще и потому, что вызывает эвристические ассоциации с теорией дискретных сигналов и кодирования, где подобные перестановки известны и играют полезную роль.

**Принцип переупаковки молекулярных элементов.** Занимаясь матричной математикой в молекулярной генетике, мы выходим на биологически значимые вопросы. Действительно, мы неожиданно обнаружили, что в системе генетического кода простой алгоритмической перестановки элементов в триплетях на основе циклического сдвига достаточно для получения новых содержательных геноматриц с тетра-размножением мозаик вырожденности кода и со свойствами тетра-размножения их бинарных матричных аналогов (Рис. 2, 4). Значит, видимо, и в биологических процессах простой переупаковки молекулярных элементов в объекте может быть достаточно для получения в итоге четверки новых аналогичных объектов, то есть для тетра-размножения.

Это напомнило нам о тетра-размножении половых клеток в загадочном акте мейоза. Современная наука не располагает общепринятым пониманием механизмов самоорганизации, обеспечивающих этот удивительный биологический акт самовоспроизводства, хотя предположений о его вибрационной или иной природе различными авторами высказывалось немало. Как известно, циклические процессы пронизывают организацию живого вещества на всех уровнях. Пошаговые циклически организованные процессы типа считывания информации от элемента к элементу вдоль цепи очень характерны для молекулярной генетики, например, для считывания информации с ДНК.

По совокупности этих и других фактов мы выдвигаем гипотезу о том, что в основе акта мейозного тетра-размножения лежит механизм алгоритмической переупаковки молекулярных элементов половых клеток с участием алгоритмов циклических и диадических сдвигов. По нашим представлениям, переупаковка биологических молекул и их ансамблей с участием циклических и диадических сдвигов является важным механизмом и принципом биологической самоорганизации и саморазвития на разных уровнях. Значение этого принципа молекулярной переупаковки будет со временем раскрываться все более и более.

Кроме того, циклические коды, основанные на циклических сдвигах, играют важную роль в теории дискретных сигналов и помехоустойчивых кодах. Циклическим кодом называется линейный код, который вместе с любым своим вектором содержит также и его циклический сдвиг. Сформулированная гипотеза, предполагающая то, что организм наделен алгоритмами циклических и диадических сдвигов и использует их при молекулярных переупаковках, одновременно затрагивает вопрос о молекулярной экономии при кодировании генетической информации. Действительно, подобные алгоритмы позволяют организму не содержать для каждого кодового слова отдельный молекулярный объект, а за счет повторяющейся циклической переупаковки одной исходной молекулы обеспечивать целый набор кодовых слов при резкой экономии молекулярного материала. Тем самым, принцип молекулярной переупаковки распространяется нами не только на мейоз и ему подобные акты конструирования новых биологических тел, но и на эффективную передачу информации кодовыми словами в условиях минимизации необходимого количества молекул.

**О числовых геноматрицах.** В предыдущих разделах были приведены некоторые из примеров плодотворности подхода на основе кронекеровского семейства матриц к системам генетического кода. Важной отличительной особенностью кронекеровского произведения является то, что собственные значения кронекеровского произведения  $A \otimes B$  матриц  $A$  и  $B$ , имеющих собственные значения  $\alpha_i$  и  $\beta_k$ , равны произведениям  $\alpha_i \cdot \beta_k$  этих собственных значений. Через это свойство само понятие кронекеровского произведения матриц может быть введено в математику [Беллман, 1976]. Коль скоро собственные значения столь важны для темы кронекеровских произведений, то естественно обратиться к изуче-



нию числовых геноматриц, которые имеют собственные числа (символьные матрицы таковых не имеют).

Кроме того, в теории цифровых сигналов сигналы представляются последовательностью числовых значений их амплитуды в точках отсчета. При этом данная теория строится на представлении дискретных сигналов в виде векторов многомерных пространств: значение сигнала на каждом такте трактуется как значение одной из координат многомерного пространства сигналов. Теория дискретных сигналов оказывается во многом наукой о геометриях многомерных пространств. Размерность такого пространства равна количеству моментов отсчета у сигнала. Для этих многомерных векторных пространств вводятся метрические понятия и вообще все необходимое для тех или иных задач обеспечения надежности, скорости, экономичности при передаче сигнальной информации. Например, важные для информатики понятия энергии и мощности дискретного сигнала оказываются в многомерной геометрии пространства сигналов не чем иным, как квадратом длины многомерного вектора-сигнала и квадратом длины вектора-сигнала, деленным на размерность пространства. Различные передаваемые и принимаемые сигналы и их ансамбли сравниваются в цифровых технологиях как геометрические объекты таких метрических многомерных пространств. На этом построены методы и алгоритмы распознавания сигналов и образов, выявления и исправления информационных ошибок, искусственного интеллекта и обучения роботов, и пр. Если мы хотим использовать разнообразные методы теории сигналов в анализе системы генетического кодирования, то нам надо научиться переходить от символьных геноматриц и секвенций к их числовым аналогам.

Используемый авторами метод обеспечения такого перехода заключается в замене буквенных символов А, С, G, U(T) азотистых оснований теми или иными количественными параметрами этих молекулярных букв, которые определяют их физико-химическую роль. Например, в замене этих букв числами их атомов, водородных связей и пр. При этом символьные геноматрицы и последовательности мультиплетов трансформируются в соответствующие числовые геноматрицы и последовательности.

В качестве конкретного примера рассмотрим матрицы водородных связей азотистых оснований кода. Комплементарные водородные связи букв кода давно подозреваются на особую информационную значимость. Речь идет о двух и трех водородных связях (по которым C=G=3, A=U=2), соединяющих комплементарные пары азотистых оснований в молекулах наследственности. Заменяем каждый полиплет во всех матрицах  $P^{(n)}$  (Рис. 1) произведением чисел водородных связей его азотистых оснований. При этом, например, триплет CGA в октетной матрице  $P^{(3)}$  заменяется на произведение  $3*3*2=18$ . В результате получаем мультипликативные числовые невырожденные матрицы  $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$  (Рис. 5).

$$P_{\text{МУЛЬТ}}^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad P_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{vmatrix}; \quad P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)} = \begin{vmatrix} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ 18 & 27 & 12 & 18 & 12 & 18 & 8 & 12 \\ 18 & 12 & 27 & 18 & 12 & 8 & 18 & 27 \\ 12 & 18 & 18 & 27 & 8 & 12 & 12 & 18 \\ 18 & 12 & 12 & 8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 8 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 12 & 8 & 18 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 8 & 12 & 12 & 18 & 12 & 18 & 18 & 27 \end{vmatrix}$$

Рис. 5. Начало семейства квинтовых мультипликативных геноматриц  $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ , основанного на произведениях чисел водородных связей ( $C=G=3, A=U=2$ ).

В прошлом выпуске ежегодника «Дельфис» это семейство геноматриц рассматривалось авторами в связи с древнекитайской «Книгой Перемен», пифагорейским музыкальным строем и золотым сечением [Петухов, Петухова, 2006]. В настоящей статье покажем, что эти геноматрицы относятся к специальному классу  $2^n$ -мерных гиперкомплексных чисел, множество которых обладает коммутативно-ассоциативным умножением. Этот класс чисел строится авторами на алгоритмическом обобщении так называемых двойных чисел, введенных Клиффордом в 1872 году:  $x_0 * 1 + x_1 * e_1$ , где  $e_1^2 = -1$ . Соответствующий предложенный авторами блочно-фрактальный алгоритм порождения этих  $2^n$ -мерных чисел можно трактовать как частный случай общего алгоритма удвоения Грассмана-Клиффорда. Достоинством предложенного блочно-фрактального алгоритма является его наглядность и относительная простота, а также содержательность получаемых с его помощью результатов.

$2^n$ -мерные числа, получаемые с его помощью через матричные формы представления обобщаемых чисел, названы матрионами [Петухов, Петухова, 2007; Петухов, 2007]. С учетом того, что двойные числа в матричной форме своего представления, показанной на Рис. 6 слева, связаны с преобразованием гиперболического поворота, данные обобщения этих двойных чисел называются гиперболическими матрионами (по ходу статьи мы иногда будем опускать прилагательное «гиперболические», поскольку иные виды матрионов, например, круговые, в ней не рассматриваются). Добавим, что с преобразованием гиперболического поворота связаны гиперболические функции, специальная теория относительности, геометрическая теория логарифмов, теория солитонов синус-Гордона. Авторам не удалось найти в литературе углубленного изучения этих матрионных видов гиперкомплексных чисел. Поэтому им пришлось самостоятельно разрабатывать теоретические и прикладные материалы по матрионам. Изучение данных поличисел в их матричной форме представления ведется уже ряд лет, начиная с работ [Petoukhov, 2001].

Множества  $2^n$ -мерных гиперболических матрионов, определяемые над полем действительных чисел, включают в себя единичные матрицы в качестве своих единиц и образуют кольца и алгебры со специфическими таблицами умножения базисных единиц. Поскольку гиперболические матрионы отражают структурные свойства общебиологических систем генетического кодирования, то давно известные в математике двойные числа обретают новые грани своей значимости в области биологии, физиологии, психофизики и других областях. Например, двойные числа через свои матрионные обобщения оказываются связанными с пифагорейским музыкальным строем и с древнекитайской табличной системой «Книги перемен», написанной несколько тысяч лет назад.

При построении  $2^n$ -мерных гиперболических матрионов, как обобщений двойных чисел, каждый действительный элемент  $x_0$  и  $x_1$  матричной формы представления двойного числа (Рис. 6 слева) сам рассматривается как  $(2 \times 2)$ -матрица некоторого двойного числа:  $x_0 = [y_0 \ y_1; y_1 \ y_0]$ ,  $x_1 = [y_2 \ y_3; y_3 \ y_2]$  (здесь нами применяется строчная запись матриц, заимствованная из программы MatLab). При вложении этих  $(2 \times 2)$ -матриц двойных чисел в исходную  $(2 \times 2)$ -матрицу, последняя становится  $(2^2 \times 2^2)$ -матрицей, являющейся матричной формой представления четырехмерного гиперболического матриона. Вновь трактуя каждый элемент новой  $(2^2 \times 2^2)$ -матрицы как  $(2 \times 2)$ -матрицу некоторого двойного числа ( $y_0 = [z_0 \ z_1; z_1 \ z_0]$ ,  $y_1 = [z_2 \ z_3; z_3 \ z_2]$ ,  $y_2 = [z_4 \ z_5; z_5 \ z_6]$ ,  $y_3 = [z_6 \ z_7; z_7 \ z_6]$ ) и вставляя их как блоки, получаем  $(2^3 \times 2^3)$ -матрицу, представляющую 8-мерный гиперболический матрион и т.д. (Рис. 6).

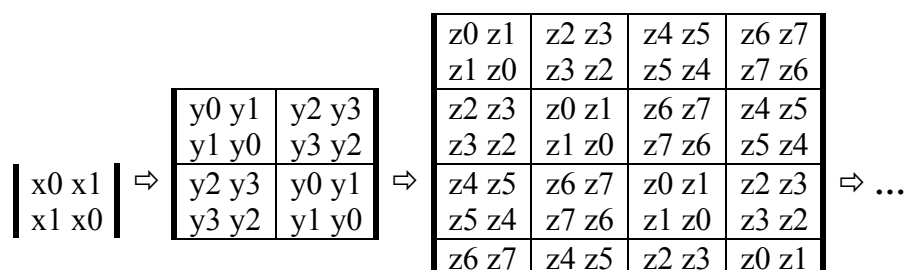


Рис. 6. Построение  $2^n$ -мерных гиперболических матрионов.

Все  $(2^n \times 2^n)$ -матрицы гиперболических матрионов являются бисимметрическими, то есть симметрическими относительно обеих диагоналей. Эти  $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, построенные такой локальной заменой каждого элемента матричным блоком, также обладают глобально блочным характером фрактального типа. Их  $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$ -квадранты, расположенные вдоль каждой диагонали, тождественны друг другу. Поэтому, обозначив эти квадранты через  $A_1$  и  $A_2$ , получаем, что при любом  $n$  вся блочная матрица имеет вид матрицы двойного числа:  $[A_1 \ A_2; A_2 \ A_1]$ . Это свойство тождественности вдоль диагоналей в равной степени относится к структурам самих квадрантов, субквадрантов, субсубквадрантов и т.д. В этом смысле имеет место блочная фрактальность. Этот же алгоритм построения гиперболических матрионов можно представить в форме кронекеровского произведения  $(2 \times 2)$ -матриц двойных чисел. Базисными единицами в многомерных матрионах выступают не только действительная и мнимые единицы  $i_k$  ( $i_k^2 = -1$ ), но и такие единицы  $e_k$ , для которых  $e_k^2 = +1$ . Эти базисные единицы  $e_k$  в рамках теории матрионов условно именуется полумнимыми единицами, поскольку в таблицах умножения базисных единиц матрионов они частично обладают свойствами как действительной, так и мнимой единиц, занимая некоторое промежуточное положение между ними.

Каждую  $(2^n \times 2^n)$ -матрицу гиперболического матрионов можно представить в виде суммы базисных матриц. Например, гиперболический тетрамастрион  $G_2$  раскладывается на базисные матрицы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} &= x_0^* \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + x_1^* \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \\
 &+ x_2^* \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + x_3^* \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

В правой части (1) первая базисная матрица представляет собой единичную матрицу, поэтому обозначим ее символом  $I$ . Последующие три базисных матрицы обозначим символами  $e_1, e_2, e_3$ , поскольку они являются полумнимыми единицами, квадрат которых равен  $+1$ .

При замене базисных матриц подобными символами любой  $2^n$ -мерный гиперболический матрион приобретает полилинейную или векторную форму своего представления (Рис. 7).

Размерность	Вид гиперболического матриона
$2^1$	$x_0^* \mathbf{1} + x_1^* \mathbf{e}_1$
$2^2$	$x_0^* \mathbf{1} + x_1^* \mathbf{e}_1 + x_2^* \mathbf{e}_2 + x_3^* \mathbf{e}_3$
$2^3$	$x_0^* \mathbf{1} + x_1^* \mathbf{e}_1 + x_2^* \mathbf{e}_2 + x_3^* \mathbf{e}_3 + x_4^* \mathbf{e}_4 + x_5^* \mathbf{e}_5 + x_6^* \mathbf{e}_6 + x_7^* \mathbf{e}_7$

Рис. 7. Полилинейные или векторные представления гиперболических матрионов для случаев 2-, 4- и 8-мерного пространств.

Для гиперболических матрионов любой размерности существует общее правило вложения векторных форм матрионов меньшей размерности в векторные формы матрионов более высокой размерности. Оно заключается в том, что упорядоченный набор первых  $2^{n/2}$  слагаемых в векторной форме каждого  $2^n$ -мерного гиперболического матриона представляет собой полный упорядоченный набор слагаемых векторной формы  $2^{n-1}$ -мерного

гиперболического матриона. Другими словами, матрион меньшей размерности вложен в матрион удвоенной размерности, образуя его начальную половину. Выполнение этого правила можно видеть на примерах Рис. 8. Тем самым, гиперболический матрион, как многомерное число, объединяет в себе множество аналогичных чисел меньшей размерности в виде иерархического ансамбля.

Аналогичное правило вложения выполняется для таблицы умножения базисных единиц гиперболических матрионов. Рис. 8 представляет такую таблицу умножения для 8-мерных гиперболических матрионов.

	1	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>
1	1	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>
e <sub>1</sub>	e <sub>1</sub>	1	e <sub>3</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>7</sub>	e <sub>6</sub>
e <sub>2</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	1	e <sub>1</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>
e <sub>3</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>1</sub>	1	e <sub>7</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>4</sub>
e <sub>4</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>	1	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>
e <sub>5</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>7</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>1</sub>	1	e <sub>3</sub>	e <sub>2</sub>
e <sub>6</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	1	e <sub>1</sub>
e <sub>7</sub>	e <sub>7</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>1</sub>	1

Рис. 8. Таблица умножения базисных единиц гиперболических октоматрионов.

В левом верхнем углу таблицы умножения на Рис. 9 выделены матрицы порядка (2x2) и (4x4), представляющие собой вложенные в нее таблицы умножения базисных единиц 2-мерных и 4-мерных гиперболических матрионов соответственно. Сама таблица умножения гиперболических октоматрионов аналогичным образом вложена в таблицу умножения 16-мерных гиперболических матрионов и т.д. Тем самым, имеет место иерархия вложения соответствующих алгебр.

Уникальной особенностью гиперболических матрионов является то, что структура их таблицы умножения всегда совпадает с их собственной матричной структурой. Действительно, если символы в таблице умножения на Рис. 8 трактовать как вещественные числа, то таблица умножения оказывается гиперболическим матрионом (сравни с Рис. 6).

Характерной особенностью гиперболических матрионов как матриц является идентичность набора координат в каждой строке и столбце. Любая строка матрионной матрицы отличается от ее первой строки только перестановкой тех же самых значений элементов по специфическому алгоритму, определяющему ее как функцию первой строки. Расположение каждой координаты в  $(2^n \times 2^n)$ -матрице гиперболического матриона создает определенную мозаику, которую можно дополнительно визуализировать маркировкой ячеек с этой координатой цветом. Поскольку эта мозаика связана с базисными матрицами данных матрионов, то она является наглядным признаком, характерным для  $2^n$ -мерного матриона. При переходе к  $2^{n+1}$ -мерному матриону она передается ему «по наследству», алгоритмически воспроизводясь в его квадрантах в качестве локальной мозаики. При этом глобальная мозаика матриона увеличенной размерности имеет существенно иной вид. Поскольку матрионы связаны со структурами генетического кода и биоинформатикой, данные мозаики и их варианты могут рассматриваться как определенные генетические архетипы и использоваться в дизайне, культурологии, арт-терапии и других областях.

Матрица  $2^n$ -мерного гиперболического матриона с ненулевыми элементами, в которой все элементы равны друг другу, является вырожденной. Такие матрицы не имеют обратных к ним матриц, и для них операция деления не определена.

Невырожденные гиперболические матрионы удовлетворяют определению метрических тензоров римановой геометрии, что позволяет использовать их при анализе внутренней геометрии поверхностей биологических тел и при математическом моделировании в биологической проблеме морфологического наследования. Поверхности биологических

тел криволинейны, и к ним как нельзя более применимы понятия внутренней геометрии поверхностей, характерные для римановой геометрии и ее обобщений.

Таблицы умножения  $2^n$ -мерных гиперболических матрионов симметричны относительно главной диагонали, что отражает коммутативность данных матрионов по умножению. Коммутативность и ассоциативность гиперболических и круговых матрионов легко доказывается через использование их блочного строения.

### **Гиперболические матрионы и матрицы диадических сдвигов в информатике.**

Молекулярно-генетическая система последовательно исследуется нами с позиций теории дискретных сигналов и помехоустойчивого кодирования. Но известны ли в самой теории дискретных сигналов бисимметрические матрицы типа гиперболических матрионов? Да, наш целенаправленный поиск выявил их. Подобные матрицы в этой теории существуют и используются в связи с их полезными свойствами. Они лежат в основе ряда специфических методов анализа и синтеза сигналов и носят название матриц диадического сдвига (см., например, [Ахмед, Рао, 1980]). Данные матрицы в компьютерной информатике строятся с помощью специфической для нее операции логического сложения по модулю 2 (без применения операции кронекеровского умножения матриц). На Рис. 9 представлен пример  $(2^3 \times 2^3)$ -матрицы диадического сдвига, в каждой строке которой повторяются числа-номера ячеек в ее первой строке, но в очередности, индивидуальной для каждой строки. Именно алгоритм построения  $(2^n \times 2^n)$ -матрицы диадического сдвига обуславливает эту специфическую нумерацию всех ее  $(2^n \times 2^n)$  ячеек номерами из ряда чисел 0, 1, 2, ...,  $2^n - 1$ .

	111 (7)	110 (6)	101 (5)	100 (4)	011 (3)	010 (2)	001 (1)	000 (0)
111 (7)	0	1	2	3	4	5	6	7
110 (6)	1	0	3	2	5	4	7	6
101 (5)	2	3	0	1	6	7	4	5
100 (4)	3	2	1	0	7	6	5	4
011 (3)	4	5	6	7	0	1	2	3
010 (2)	5	4	7	6	1	0	3	2
001 (1)	6	7	4	5	2	3	0	1
000 (0)	7	6	5	4	3	2	1	0

Рис. 9. Октетная матрица диадических сдвигов из теории цифровых сигналов.

При сравнении Рис. 6 и 9 видно, что эта матрица диадических сдвигов является 8-мерным гиперболическим матрионом. Алгоритм построения  $(2^n \times 2^n)$ -матриц диадических сдвигов в теории цифровых сигналов заключается в следующем. Все строки и столбцы такой матрицы упорядоченно нумеруются в двоичной системе счисления так, как это показано на Рис. 9. Затем в каждую ячейку матрицы вставляется сумма номеров тех строки и столбца, на пересечении которых она находится, причем сумма вычисляется логическим поразрядным сложением этих бинарных номеров по модулю 2 с соблюдением правил:  $0+0=0$ ,  $0+1=1$ ,  $1+0=1$ ,  $1+1=0$ . Например, на пересечении столбца 3 (=011) и строки 2 (=010) стоит ячейка 1 (=001) как результат поразрядного сложения этих чисел по модулю 2. Как и положено для гиперболических матрионов, матрица диадических сдвигов имеет блочное строение, представляя собой фракталоподобную структуру блочных  $(2 \times 2)$ -матриц циклического сдвига. Одинаковые блоки размещены в ней вдоль обеих диагоналей как самой матрицы, так и ее квадрантов, субквадрантов и т.д., что придает ей крестообразный характер.

Но генетически наследуемое устройство наших физиологических, в том числе информационных систем также демонстрирует аналогичные крестообразные структуры. Например, сопряжение полушарий головного мозга с половинами нашего тела имеет такой крестообразный характер: левое полушарие обслуживает правую половину тела, а правое полушарие – левую половину. Крестообразной структурой наделены зрительные нервные пути из двух глаз: эти пути передают информацию о правой половине поля зре-

ния в левое полушарие мозга, а информацию о левой половине поля зрения – в правое полушарие. Это же верно для слуховой системы. По совокупности наработанных результатов можно полагать, что данные наследуемые физиологические феномены связаны с гиперболическими матрионами и основанными на них крестообразными структурами помехоустойчивых кодов систем генетического кодирования.

Добавим, что с аналогичной фрактальной структурой из крестообразных блочных матриц люди в своей интеллектуальной деятельности знакомы уже тысячи лет по шахматной доске. Если обозначить черные клетки шахматной доски числом  $a$ , а ее белые клетки – числом  $b$ , то возникшая на доске числовая матрица окажется частным случаем гиперболического матриона. Древнейшая игра в шахматы демонстрирует удивительную живучесть, которую, согласно создателю аналитической психологии К.Юнгу, можно объяснить ее близостью к архетипам бессознательного. Совокупность полученных нами результатов свидетельствует в пользу того, что структура гиперболических матрионов относится к архетипам бессознательного.

Приведенный пример с матрицами диадических сдвигов только один из многих, подтверждающих адекватность и перспективность сращения теории матрионов с компьютерной и биологической информатикой. Дополнительные материалы к теме связи систем генетического кодирования с помехоустойчивым кодированием и многомерными обобщенными числами можно найти в книге [Петухов, 2007].

#### **Литература:**

- Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. - М., 1980
- Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М., Наука, 1976.
- Бененсон Я., Шапиро Э. Компьютеры из ДНК. – В мире науки, №9, 2006, с.34-41
- Петухов С.В. Бипериодическая таблица генетического кода и число протонов. М., 2001.
- Петухов С.В. Симметрии в биологии.- Приложение к книге: А.В.Шубников, В.А.Копцик «Симметрия в науке и искусстве», 3-е изд., М., 2004, с. 489-546.
- Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение.- Метафизика. XXI век. (под ред. Ю.С.Владимирова). – М., Бином, 2006, с.216-250.
- Петухов С.В. Матричная генетика, обобщенные числа и теоретическая биология. – М., 2007 (в печати).
- Петухов С.В., Петухова Е.С. Матрично-тензорная интерпретация таблиц древнекитайской «Книги перемен» и генетического кода. Геноарт. - Ежегодник «Дельфис», М., 2006, часть 2, с.89-95.
- Петухов С.В., Петухова Е.С. Поличисла (матрионы) в биологической и компьютерной информатике. - Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 8, 2007.
- Смолянинов В.В., Петухов С.В. Симметрии генетических триплетов. - Симметрии: теоретический и методологический аспекты. Сборник научных трудов 1-го Международного семинара, Астрахань, 2005. Издательский дом «Астраханский университет», 2005, с. 42-47.
- Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М., Наука, 1966.
- Франк-Каменецкий М.Д. Самая главная молекула. – М, Наука, 1988.
- Хэмминг Р.В. Теория кодирования и теория информации.- М., 1983 (первое оригинальное издание вышло в 1950г)
- Чернавский Д.С. Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики. - Успехи физических наук, т.170, №2, с.157-183, 2000.
- Щуцкий Ю.К. Китайская классическая «Книга перемен» – М., 1997, 605 с.
- Уотермен М.С., редактор. Математические методы для анализа последовательностей ДНК, М., Мир, 1999.
- Dawkins R., The blind watchmaker. – N.-Y., Longman Scientific & Technical., 1990.

- Petoukhov S.V. Genetic Codes I: Binary Sub-Alphabets, Bi-Symmetric Matrices and Golden Section; Genetic Codes II: Numeric Rules of Degeneracy and a Chronocyclic Theory. - Symmetry in Genetic Information, ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal "Symmetry: Culture and Science", Budapest, 2001, 255-274 p.
- Petoukhov S.V. Genetic Codes II: Numeric Rules of Degeneracy and a Chronocyclic Theory. - Symmetry in Genetic Information, ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal "Symmetry: Culture and Science", Budapest, 2001, 275-306 p.
- Petoukhov S.V. The rules of degeneracy and segregations in genetic codes. The chronocyclic conception and parallels with Mendel's laws.- «Advances in Bioinformatics and its Applications» (editors – M.He, G.Narasimhan, S.Petoukhov), Proceedings of the International Conference (Florida, USA, 16-19 December 2004), Series in Mathematical Biology and Medicine, v.8, 2005, pp.512-532, New Jersey-London-Singapore-Beijing, World Scientific.
- Petoukhov S.V. Hadamard matrices and quint matrices in matrix presentations of molecular genetic systems. - Symmetry: Culture and Science, Vol. 16, No. 3, 2005, p. 247-266.
- Petoukhov S.V. Attributive conception of genetic code, its bi-periodic tables and a problem of unification bases of biological languages.-"Symmetry: Culture and Science", 2003, #1-4, p.40-59