Статья опубликована: Тематич. сборник «Музыка-Математика-Естествознание». Биомашсистемы, Т. 2. № 3. 2018. С. 162-170.

Петухов С. В., Петухова Е. С.
Лаборатория биомеханики Института машиноведения РАН

Музыка, многомерные тензорчисла и групповая робототехника

Согласно утверждению И. Канта, «в каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней математики»[1]. Исследования музыкальной гармонии тесно связаны с использованием понятий и методов математики. А. Ф. Лосев писал, что музыка есть выражение жизни числа во времени[2]. Но о каких из многих видов чисел здесь может идти речь? Рассмотрению этого вопроса посвящена наша работа.

В современной науке широко используются многомерные числа. Например, долго не признаваемые 2-мерные комплексные числа ныне являются основой квантовой механики, гидродинамики, термомеханики, электродинамики и пр. 2-мерные гиперболические числа (числа Лоренца или двойные числа) используются в специальной теории относительности и других областях. 4-мерные кватернионы Гамильтона описывают вращательные свойства физического пространства, и им в физике посвящены тысячи публикаций[3] (http://arxiv.org/abs/math-ph/0511092). Современная физика строит объединенную – универсальную – концепцию физических полей на базе чисел высокой мерности.

Основные многомерные числа, используемые в математическом естествознании, имеют матричную форму представления, в которой они содержатся в компьютерах. Приведем два примера. Двумерные комплексные числа z=x*1+y*i, где $i^2 = -1$, имеют следующую матричную форму их представления (две матрицы в правой части этой записи являются матричными представлениями вещественной и мнимой единиц **1** и **i** комплексных чисел):

$$z = x*1+y*j = \begin{bmatrix} x, & -y \\ y, & x \end{bmatrix} = x* \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} + y* \begin{bmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}$$

Двумерные гиперболические (двойные) числа w=x*1+y*j, где $j^2 = +1$ имеют следующую матричную форму (две матрицы в правой части этой записи являются матричными представлениями вещественной и мнимой единиц 1 и j двойных чисел):

---

[1] *Иммануил Кант:* сайт. URL: http://ru.wikiquote.org/wiki/Иммануил_Кант

[2] *Лосев А. Ф.* Музыка как предмет логики. – В кн.: Форма – Стиль - Выражение. – М.: Мысль, 1995

[3] *Gsponer A., Hurni J.* Quaternions in mathematical physics: сайт. URL: http://arxiv.org/abs/math-ph/0511092

$$w = x*\mathbf{1}+y*\mathbf{i} = \begin{bmatrix} x, & y \\ y, & x \end{bmatrix} = x* \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} + y* \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}$$

С этими матричными представлениями базисных элементов **1**, **i, j** мы встретимся ниже.

По выражению Г. Лонгфелло, музыка – универсальный язык человечества[4]. Поэтому естественно думать, что секреты музыки и сравнительный анализ музыкальных произведений должны строиться на использовании многомерных чисел в параллель с тенденциями математического естествознания. Но этот универсальный язык музыки генетически наследуется. У человека нет специализированного органа восприятия музыки. Это восприятие распределено по всему организму и, возможно, по всем его клеткам, подобно генетическим молекулам ДНК. Поэтому из множества видов многомерных чисел особое внимание должно быть обращено на те виды многомерных чисел, которые связаны с генетическим кодом. Нами представляется новый для математического естествознания класс многомерных чисел, связанных с системой генетического кодирования. Эти многомерные числа, называемые тензорчислами, являются перспективными для приложений в науке и культуре. Они были выявлены в исследованиях структур молекулярно-генетической системы кодирования, основы которой являются едиными для всех живых организмов. Предваряя сухое описание математики этих тензорчисел и их места в общей системе многомерных чисел, покажем примеры их применения.

В жизни мы постоянно встречаемся с многопараметрическими системами, поведение которых во времени складывается из поведения составляющих ее подсистем. Например, хореограф строит коллективный танец, задавая относительное движение отдельных танцоров. (Многие задачи создания произведения культуры, включая музыку, формально сводятся к организации коллективного поведения или пространственно-временного размещения множества его составных элементов).

Более экзотический пример из области групповой робототехники дают насекомые-киборги. Так, в США и Японии созданы тараканы-киборги, движением каждого из которых можно управлять дистанционно по радиоканалам (в США оснащение для такого таракана продается свободно по 100 долларов). Отряды этих киборгов используются для поиска людей в зданиях, разрушенных землетрясением; для поиска мест химических или радиоактивных загрязнений, и пр.

---

[4] Цитаты Г. У. Лонгфелло: сайт. URL: http://www.genialnee.net/authors/Henry_Wadsworth_Longfellow/

В связи с подобными многопараметрическими системами возникает проблема их описания, для которой оказываются полезными и удобными представляемые нами тензорчисла. Поясним это на примере следующая задачи: надо задать или описать поведение во времени 8-параметрической системы, состоящей из четырех независимых друг от друга 2-параметрических систем. Такую систему можно представить как набор четырех точек, каждая из которых движется по плоскости по своей 2-параметрической кривой. Эту систему можно ассоциировать с отрядом четырех тараканов-киборгов, каждый из которых движется на плоскости по своей задаваемой траектории, например, из следующего набора известных в аналитической геометрии траекторий, каждая из которых имеет свое историческое название:

1) «кардиоида»: x=cos(t)*(1+cos(t)); y=sin(t)*(1+cos(t));

2) «лист клевера», описываемый параметрическими уравнениями $x=\cos(t)+\cos(t)*\cos(3*t)+\cos(t)*(\sin^2(3*t)$; $y=\sin(t)+\sin(t)*\cos(3*t)+\sin(t)*\sin^2(3*t)$;

3) «пятилепестковая роза»: x=2*cos(t)*sin(5/3*t); y=sin(t)*sin(5/3*t);

4) «логарифмическая спираль»: $x=\cos(t)*(13/12)^t$; $y=\sin(t)*(13/12)^t$

Подобную задачу о 8-параметрической системе решает следующий матричный оператор M(t) с 8-ю компонентами $a_0(t)$, $a_1(t)$,…, $a_7(t)$, где $a_0(t)=\cos(t)*(1+\cos(t))$; $a_1(t)=\cos(t)+\cos(t)*\cos(3*t)+\cos(t)*(\sin^2(3*t)$; $a_2(t)=2*\cos(t)*\sin(5/3*t)$; $a_3(t)=\cos(t)*(13/12)^t$; $a_4(t)=\sin(t)*(1+\cos(t))$; $a_5(t)=\sin(t)+\sin(t)*\cos(3*t)+\sin(t)*\sin^2(3*t)$; $a_6(t)=\sin(t)*\sin(5/3*t)$; $a_7(t)=\sin(t)*(13/12)^t$:

M(t) =

$a_0(t)$	$-a_1(t)$	$a_2(t)$	$-a_3(t)$	$-a_4(t)$	$a_5(t)$	$a_6(t)$	$-a_7(t)$
$a_0(t)$	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$-a_4(t)$	$-a_5(t)$	$a_6(t)$	$a_7(t)$
$-a_0(t)$	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$-a_3(t)$	$a_4(t)$	$-a_5(t)$	$a_6(t)$	$-a_7(t)$
$-a_0(t)$	$-a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$a_4(t)$	$a_5(t)$	$a_6(t)$	$a_7(t)$
$a_4(t)$	$-a_5(t)$	$-a_6(t)$	$a_7(t)$	$a_0(t)$	$-a_1(t)$	$a_2(t)$	$-a_3(t)$
$a_4(t)$	$a_5(t)$	$-a_6(t)$	$-a_7(t)$	$a_0(t)$	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$
$-a_4(t)$	$a_5(t)$	$-a_6(t)$	$a_7(t)$	$-a_0(t)$	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$-a_3(t)$
$-a_4(t)$	$-a_5(t)$	$-a_6(t)$	$-a_7(t)$	$-a_0(t)$	$-a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$

Подчеркнем, что подобные 8-мерные операторы (а в общем случае 2^n-мерные операторы) описывают поведение реальных объектов нашего 3-мерного физического мира или его 2-мерных плоскостей, а потому не требуют обязательного мысленного погружения в абстрактные 8-мерные пространства.

Этот оператор M(t) построен на основе генетических проекционных операторов[5]. Он является суммой 4-х разреженных матричных операторов:

$$M(t)=M_0(t)+M_1(t)+M_2(t)+M_3(t)=$$

$$\begin{array}{|cccccccc|}\hline a0(t) & 0 & 0 & 0 & -a4(t) & 0 & 0 & 0 \\ a0(t) & 0 & 0 & 0 & -a4(t) & 0 & 0 & 0 \\ -a0(t) & 0 & 0 & 0 & a4(t) & 0 & 0 & 0 \\ -a0(t) & 0 & 0 & 0 & a4(t) & 0 & 0 & 0 \\ a4(t) & 0 & 0 & 0 & a0(t) & 0 & 0 & 0 \\ a4(t) & 0 & 0 & 0 & a0(t) & 0 & 0 & 0 \\ -a4(t) & 0 & 0 & 0 & -a0(t) & 0 & 0 & 0 \\ -a4(t) & 0 & 0 & 0 & -a0(t) & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|cccccccc|}\hline 0 & -a_1(t) & 0 & 0 & 0 & a_5(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_1(t) & 0 & 0 & 0 & -a_5(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_1(t) & 0 & 0 & 0 & -a_5(t) & 0 & 0 \\ 0 & -a_1(t) & 0 & 0 & 0 & a_5(t) & 0 & 0 \\ 0 & -a_5(t) & 0 & 0 & 0 & -a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_5(t) & 0 & 0 & 0 & a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_5(t) & 0 & 0 & 0 & a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & -a_5(t) & 0 & 0 & 0 & -a_1(t) & 0 & 0 \\ \hline \end{array} +$$

$$\begin{array}{|cccccccc|}\hline 0 & 0 & a_2(t) & 0 & 0 & 0 & a_6(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_2(t) & 0 & 0 & 0 & a_6(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_2(t) & 0 & 0 & 0 & a_6(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_2(t) & 0 & 0 & 0 & a_6(t) & 0 \\ 0 & 0 & -a_6(t) & 0 & 0 & 0 & a_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & -a_6(t) & 0 & 0 & 0 & a_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & -a_6(t) & 0 & 0 & 0 & a_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & -a_6(t) & 0 & 0 & 0 & a_2(t) & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|cccccccc|}\hline 0 & 0 & 0 & -a_3(t) & 0 & 0 & 0 & -a_7(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_3(t) & 0 & 0 & 0 & a_7(t) \\ 0 & 0 & 0 & -a_3(t) & 0 & 0 & 0 & -a_7(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_3(t) & 0 & 0 & 0 & a_7(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_7(t) & 0 & 0 & 0 & -a_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & -a_7(t) & 0 & 0 & 0 & a_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_7(t) & 0 & 0 & 0 & -a_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & -a_7(t) & 0 & 0 & 0 & a_3(t) \\ \hline \end{array}$$

Каждый из этих операторов $M_0(t)$, $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$, действуя на произвольный 8-мерный вектор $X=[x_0, x_1, .., x_7]$, задает движение точки только в одной из 4-х координатных плоскостей 8-мерного пространства. Например, выражение $X*M_0=[x_0(t), 0, 0, 0, x_4(t), 0, 0, 0]$ определяет движение в плоскости (x_0, x_4) и отсутствие движения в других координатных плоскостях.

Аналогичная задача о многопараметрических системах с избирательным управлением их подсистемами имеет отношение также к индивидуальной робототехнике и протезированию, когда надо задать согласованное движение многих приводов типа пар «сгибатель-разгибатель» в двигательном аппарате человека и животных, а также оппозиционных пар во многих задачах искусственного интеллекта.

В операторе M(t) расположение его 8-ми повторяющихся компонент таково, что квадранты вдоль главной диагонали тождественны, а квадранты вдоль второй диагонали тождественны с точностью до инверсии всех знаков. Поэтому данный оператор может быть записан в следующей форме:

---

[5] *Петухов С. В.* Генетический код и проекционные операторы матричной генетики // Метафизика. 2014. №1(11), С. 44-65.

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_0(t),-a_1(t),a_2(t),-a_3(t) \\ a_0(t),\ a_1(t),a_2(t),\ a_3(t) \\ -a_0(t),\ a_1(t),a_2(t),-a_3(t) \\ -a_0(t),-a_1(t),a_2(t),\ a_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -a_4(t),\ a_5(t),a_6(t),-a_7(t) \\ -a_4(t),-a_5(t),a_6(t),\ a_7(t) \\ a_4(t),-a_5(t),a_6(t),-a_7(t) \\ a_4(t),\ a_5(t),a_6(t),\ a_7(t) \end{bmatrix}$$

Здесь $\otimes$ – символ тензорного умножения, а две (2*2)-матрицы представляют вещественную и мнимую единицы комплексного числа $z=1*x+i*y$, где $i^2 = -1$. Тензорное (или кронекеровское) умножение матриц является широко используемой операцией в математике, физике, информатике и пр.

При фиксированном t каждый из операторов вида M(t) является матрицей, имеющей обратную M^{-1} ($M*M^{-1}=E_8$). Множество всех матриц вида M(t) вместе с обратными к ним, а также их произведениями, обладает свойствами числовой системы: оно замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (произведение двух матриц множества дает матрицу этого же множества, и т.д.). Члены этого замкнутого множества мы называем тензоркомплексными числами 8-го порядка. Данные 8-мерные тензоркомплексные числа M являются таким обобщением комплексных чисел $z=1*x + i*y$, при котором используются те же базисные элементы 1 и i, но вместо обычного умножения используется тензорное $\otimes$, а вместо вещественных множителей «x» и «y» – множители в форме квадратных матриц.

Насколько мы можем судить, тензоркомплексные числа и ряд других видов тензорчисел (тензордвойных, тензоркватернионных и пр.)[6], которые были выявлены одним из авторов при изучении структур системы молекулярно-генетического кодирования, являются новыми для математического естествознания. С их помощью можно, в общем случае, моделировать 2^n-параметрические системы не только с подсистемами индивидуального поведения на плоскости, но также в 3-мерном физическом пространстве. Например, можно задать движение (или кодирование) по двум 3-мерным спиралям типа двойной спирали ДНК.

Выше мы привели пример применения 8-мерных тензоркомплексных чисел к 8-параметрической системе четырех 2-параметрических подсистем, представленных движением точек в четырех комплексных плоскостях 8-мерного пространства. Но как быть в случае систем с большим числом параметров, например, с 100 параметрами? Нами найдены простые алгоритмы, трансформирующие (4*4)-матрицы тензорчисел (или операторов на их основе) в (2^n*2^n)-матрицы для моделирования соответствующих систем со сколь угодно большим числом параметров. При этом тензорчисловыми

[6] Там же.

матрицами моделируются также симбиотические системы (пространства), различные подсистемы (подпространства) которых избирательно управляются комплексными и двойными числами, кватернионами Гамильтона и пр.

Отметим следующие преимущества применения тензорчисел и их операторов:

1) возможность синхронного управления поведением всех подсистем многопараметрической системы за счет умножения ее тензорчислового оператора на другой оператор аналогичного типа, что дает новый тензорчисловой оператор нового поведения всей системы;

2) возможность тиражирования и избирательного считывания информации: применение названных алгоритмов образования тензорчисловых (2^n*2^n)-матриц из тензорчисловых матриц низкого порядка дает модели порождения сколь угодно высокопараметрических систем, в которых отдельные подсистемы воспроизводят поведение исходных подсистем или обладают новым поведением. Это ассоциируется с фактами повышения многопараметричности организмов в ходе онто- и филогенетического усложнения и тиражирования ДНК по всем клеткам.

Организм является огромным хором генетически наследуемых циклических процессов. Представляя организм как многопараметрическую систему с кодируемым поведением его физиологических подсистем, мы получаем на основе тензорчисловых операторов новые средства сравнительного анализа и моделирования систем организма. Соответственно, матричная генетика и тензорчисла приводят нас к новой концепции живого организма: организм есть жизнь тензорчисел во времени (по аналогии с утверждением А. Ф. Лосева о том, что музыка есть жизнь чисел во времени).

Обратимся теперь к общим закономерностям психофизики, для моделирования которых также полезны тензорчисла. Организм является машиной с генетически наследуемыми алгоритмами обработки информации. Например, рассматривая светящуюся точку, человек не думает о том, что информация о силе света, падающего на рецептор сетчатки глаза, сразу логарифмически кодируется и от рецептора по нерву бежит уже кодированная информация в форме дискретных импульсов.

Организм унифицирован и согласован в своих наследуемых структурах информатики. Одно из свидетельств этому дает основной психофизический закон Вебера-Фехнера, наследственно реализуемый в разных сенсорных подсистемах организма (зрение, слух, обоняние, осязание, вкус и пр.): сила ощущения пропорциональна логарифму силы раздражения $p = k*\ln(V/V_0)$, где p – сила ощущения,

V – сила раздражения, V_0 – порог восприятия для раздражение данного вида, k – коэффициент пропорциональности, разный для разных видов раздражения: зрительных, тактильных и пр. В частности, именно в связи с этим законом для характеристики силы звука используется логарифмическая шкала в децибелах. Современные исследования трактуют этот закон в качестве составной части термодинамического закона широкой общности[7].

Неправильно думать, что данный закон определен только свойствами нервной системы. Давно известно, что данный генетически наследуемый «закон применим для хемотропических, гелиотропических и геотропических движений бактерий и грибов и антерозоидов папоротников, мхов и явнобрачных…. Закон Вебера-Фехнера, следовательно, - не закон нервной системы и центров, но закон протоплазмы вообще и ее способности отвечать на раздражения»[8].

Но геометрическая теория натуральных логарифмов, фигурирующих в этом законе, строится на гиперболических преобразованиях, задаваемых 2-мерными гиперболическими числами (в связи с чем натуральные логарифмы в начале их истории назывались гиперболическими, поскольку они соответствует площадям под гиперболой)[9]. Применение тензоргиперболических чисел и их операторов позволяет моделировать кооперативную реализацию логарифмического закона Вебера-Фехнера в разных подсистемах многопараметрической системы организма (с разными весовыми коэффициентами k и порогами восприятия V_0 в отдельных подсистемах восприятия)[10]. М. Хайдеггер утверждал, что язык умнее нас[11]. Тензорчисла – это мощный математический язык, изучая и используя скрытые сокровища которого, мы станем умнее.

Можно вспомнить также, что У. Гамильтон, открыв кватернионы, всю последующую жизнь изучал язык кватернионов, а его последователи только в XX веке опубликовали тысячи работ по кватернионам в физике. И изучение свойств

---

[7] *Чукова Ю. П.* Закон Вебера-Фехнера. М., 2009. С. 143.

[8] *Шульц Е. А.* Организм как творчество // Вопросы теории и психологии творчества. Т. 7. Харьков,1916. С. 108-190.

[9] *Шерватов В. Г.* Гиперболические функции. М., 1954. С. 55.

[10] *Petoukhov S. V.* The genetic code, algebra of projection operators and problems of inherited biological ensembles. сайт. URL: http://arxiv.org/abs/1307.7882 (дата обращения: 23.01.2014)

[11] *Хайдеггер М.* Бытие и время. СПб.: Наука, 2002. С. 503.

кватернионов интенсивно продолжается в настоящее время[12]. Но кватернионы – частный случай тензорчисел. Соответственно, язык тензорчисел еще «умнее», и он научит нас многому.

Согласно Пифагору, «мир есть число», «числа правят миром», «познать мир – это значит познать управляющие им числа». При этом он имел в виду не банальное использование числа в качестве количественной меры, а наличие у чисел внутренней влиятельной структуры (числа для него обладали индивидуальным и геометрическим ликом, будучи, например, «треугольными», «прямоугольными», «пятиугольными» и пр.). Эта идея Пифагора оказала колоссальное влияние на все последующие поколения. Б. Рассел: «Я не знаю другого человека, который оказал бы такое влияние на научное мышление людей, как Пифагор»[13]. С этой точки зрения в мире нет более фундаментальной научной идеи, чем эта. Пифагорейская мысль о фигурном устроении числа реализуется в современной математике и физике в теории матриц. В. Гейзенберг подчеркивал: «Современная физика идёт вперёд по тому же пути, по которому шли Платон и пифагорейцы»[14]. Квантовая механика началась с «матричной механики» Гейзенберга. Использование матриц в науке и технологиях огромно и продолжает возрастать. В частности, в компьютерах комплексные и гиперкомплексные числа хранятся и используются именно в форме матриц.

Нами в бесконечном множестве матриц найдено и изучается такое их небольшое подмножество, с которым связана структурная организация генетического кодирования и которое привело нас к тензорчислам.

«Число – одно из самых фундаментальных понятий не только математики, но и всего естествознания. Оно, быть может, первичней таких глобальных категорий, как время, пространство, вещество или поле»[15]. Саму задачу земной жизни человека Пифагор определял как внесение в его внутренний мир порядка, числа, гармонии.

«Сложность цивилизации, как в зеркале, отражается в сложности используемых ею чисел»[16]. Изучение и использование описываемых нами тензорчисел отражает сложность современной цивилизации.

---

[12] *Ефремов А. П.* Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. М., 2005. С. 380.

[13] *Рассел Б.* История западной философии. Книга 1. Новосибирск, 2001. С. 365.

[14] *Гейзенберг В.* Физика и философия. М., 1989. С. 400.

[15] *Павлов Д. Г.* Редакционная статья // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004, №1. С. 3

[16] *Дейвис Ф. Дж.* Арифметика // Математика в современном мире. М., 1967. С. 30-42.

Эволюция музыки, как и эволюция науки, идет по пути освоения все более многомерных пространств, представляющих системы с увеличенными степенями свободы. Число – язык науки. Мы надеемся, что многомерные тензорчисла могут со временем стать языком науки о музыкальном творчестве и многомерных пространствах музыки. Недаром Г. Лейбниц утверждал: «Музыка есть таинственная арифметика души, которая вычисляет себя, сама того не сознавая»[17]. К этому хочется добавить, что данная таинственная арифметика генетически наследуется и сопряжена с генетическим кодированием.

---

[17] *Guhrauer G.E.* Leibniz. Breslau, 1846. Vol. 1, appendix. 70 p., P. 66.