

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ БИОФИЗИКУ.
ЭЛЕМЕНТЫ БИОИНФОРМАТИКИ
И БИОИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Учебно-методическое пособие

МОСКВА 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра вычислительных моделей технологических процессов

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ БИОФИ-
ЗИКУ.
ЭЛЕМЕНТЫ БИОИНФОРМАТИКИ И БИО-
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Учебно-методическое пособие

Составители: **С.В. Петухов**
Д.Ш. Катанов

МОСКВА 2009

УДК 575+577

Рецензент

Доктор технических наук, профессор *К.К. Глухарев*

Введение в математическую биофизику. Элементы биоинформатики и биоинформационных технологий: учебно-методическое пособие / сост.: С.В. Петухов, К.Ш. Катанов. – М.: МФТИ, 2009. – 44с.

Описываются связи биофизики и биоинформатики. Анализируются структурные особенности систем генетического кодирования живого вещества на основе матричных форм представления генетического кода. Для исследования феномена высокой помехоустойчивости генетического кодирования в живой природе заимствуются матричные методы теории помехоустойчивого кодирования информации («матричная генетика»). Выявляется связь генетического кода по параметрам его вырожденности с функциями Радемахера, Уолша и матрицами Адамара, известными в теории цифровой связи, спектральном анализе и квантовых компьютерах. Пособие ориентировано на студентов и аспирантов, заинтересованных в познании информационных патентов живой природы для их использования в науке и технике.

УДК 575+577

© ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД И ГЕНЕТИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ.....	6
1.1. Разнообразие и унифицированность в живой материи.....	6
1.2. Роль и особенности генетического кода.....	6
1.3. Проблема помехоустойчивости и матричные методы.....	8
1.4. Бинарные субалфавиты генетического алфавита.....	9
1.5. Кронекеровские семейства генетических матриц.....	11
2. ГЕНЕТИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И ЧИСЛОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА.....	11
2.1. Числовые геноматрицы и золотое сечение.....	11
2.2. Генетические матрицы и матрицы диадических сдвигов.....	18
2.3. Геноматрицы, музыкальная гармония и пифагорейский музыкальный строй.....	20
2.4. О гармонии строя протонов у множества аминокислот.....	27
3. СИММЕТРИИ ВЫРОЖДЕННОСТИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА В ЕГО МАТРИЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ.....	30
3.1. Мозаичные геноматрицы вырожденности генетического кода.....	30
3.2. Связь мозаики вырожденности геноматриц с функциями Радемахера.....	30
3.3. О биполярной алгебре операторов на основе радемахеровских представлений геноматриц.....	35
3.4. Геноматрицы Адамара и U -алгоритм.....	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	39
ЛИТЕРАТУРА.....	42

ВВЕДЕНИЕ

Биофизика как наука началась с попыток понять живые организмы, используя положения физики неживых систем. Однако с течением времени появились подозрения, что такой физики совершенно недостаточно. Например, Э. Шредингер писал в своей книге «Что такое жизнь с точки зрения физики?»: *«Для организма следует ожидать новых законов. ... все известное нам о структуре живой материи заставляет ожидать, что деятельность живого организма нельзя свести к появлению обычных законов физики. И не потому, что имеется какая-нибудь «новая сила» или что-либо еще, управляющее поведением отдельных атомов внутри живого организма, а потому, что его структура отличается от всего изученного нами до сих пор в физической лаборатории... Развертывание событий в жизненном цикле организма обнаруживает удивительную регулярность и упорядоченность, не имеющих себе равных среди всего, с чем мы встречаемся в неодушевленных предметах... Короче говоря, мы видим, что существующая /в организме/ упорядоченность проявляет способность поддерживать саму себя и производить упорядоченные явления... Мы вправе предполагать, что живая материя подчиняется новому типу физического закона».*

В настоящее время начинают доминировать новые подходы к пониманию связи физики и биологии. Они отражены, например, в статье «Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики» Д.С. Чернавского («Успехи физических наук», 2000 г., № 2): *«В физике неживой природы эти понятия /информации и ценной информации/ практически не используются, поскольку они там не нужны. В биологии, напротив, понятие «информация» и особенно «ценная информация» являются основными, и без них ни понять, ни описать явления в живой природе невозможно. В этом собственно и заключается специфика «живого»». Представление об информационной природе живой материи отражается в словах: «Если вы хотите понять жизнь, ... то думайте об информационной технологии» (Dawkins, 1991).*

Подчеркнем, что информатика как наука сегодня обособлена от химии и физики и обладает своими собственными формальными средствами и понятиями (например, кодирование и декодирование, помехоустойчивые коды и пр.). С открытием генетического кода в теории биологической эволюции возникает проблема «информационной эволю-

ции», которая существует наряду с представлением о химической эволюции, но является достаточно самостоятельной и, видимо, первостепенной проблемой для понимания живой материи.

В силу своей молодости информатика вплоть до последних десятилетий не использовалась в концепциях происхождения жизни и теоретической биологии вообще. Но именно с позиций биоинформатики современная наука надеется получить более глубокое и адекватное понимание того, что такое жизнь и каково ее происхождение. И во многом именно в биоинформатике закладываются сегодня основы биологии будущего. Поэтому особенно актуальной оказывается задача максимального сращения генетических и вообще биологических знаний с той математикой, которая сложилась в информатике и которая является основой цифровой техники, стремительно ворвавшейся в нашу жизнь.

Природная технология генетического кодирования ежеминутно используется в окружающем нас мире огромное число раз, производя миллионы тонн биологических масс с наследуемыми уникальными свойствами. Это важнейшая и эффективнейшая мировая технология, обеспечивающая жизнь на нашей планете во всех ее неисчислимых проявлениях. И овладение этой технологией, происходящее на наших глазах, представляет собой принципиальный момент в эволюции человечества. В настоящее время человечеством создается целая бионанотехнологическая индустрия. В этой связи полезно изучение особенности ансамблей генетических молекул, которые напоминают особенности цифровой информатики, активно использующей математику матриц. Современное машиноведение (Институт машиноведения РАН является базовым для кафедры вычислительных моделей технологических процессов МФТИ) также активно обращается к нанороботам на молекулах ДНК, ДНК-компьютерам, нанотехнологиям и наноматериалам, для развития которых важно овладение патентами живой природы в области генетического кодирования и биоинформатики. В частности, важным является познание принципов помехоустойчивости генетического кода в связи с проблемой обеспечения помехоустойчивости информационных систем контроля и управления машин и систем человек-машина для снижения риска аварий и техногенных катастроф. Общеизвестно, что без глубоких знаний о живом веществе конструктору машин и человеко-машинных комплексов будущего уже нельзя обойтись. Для обеспечения связей между машиноведением и медико-биологическими науками в Институте машиноведения РАН (ИМАШ РАН) давно создан и успешно работает отдел биомеханики.

1. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД И ГЕНЕТИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

1.1. Разнообразие и унифицированность в живой материи

Разнообразие биологических видов, отличающихся размерами, формой, типом движений и прочим, поразительно. Однако молекулярная генетика открыла, что все живые организмы имеют одни и те же молекулярные основы генетического кодирования и в этом отношении неотличимы друг от друга. Другими словами, в науке произошло великое объединение живых организмов. Тот факт, что именно с информационно-наследственной точки зрения все живые организмы удивительным образом унифицированы, вызвал повышенный интерес науки к возможной информационной природе живой материи. С информационной точки зрения живые организмы являются информационными сущностями. Они живут, потому что получают генетическую информацию от своих предков, и существуют для того, чтобы передать генетическую информацию потомкам. В биологической литературе нередко можно встретить утверждение о том, что живые организмы являются текстами, начиная с молекулярного уровня своей организации.

Наш организм постоянно занимается кодированием информации. Например, когда на сетчатку глаза проецируется светящаяся точка, то в нервную систему с рецепторов поступает уже кодированная информация о логарифме этой яркости. Живой организм может рассматриваться как машина для обработки потоков кодированной информации, причем принципы кодирования наследуются и сопряжены с математикой генетического кодирования.

Разнообразные сенсорные системы в организме имеют много общего в принципах обработки информации и закономерностях восприятия. Например, известные законы психофизики Вебера–Фехнера в равной мере относятся к зрительной, слуховой, тактильной и другим системам. Все эти принципы и законы передаются из поколения в поколение, что свидетельствует о их сопряжении со структурными принципами генетического кода.

1.2. Роль и особенности генетического кода

Достижения молекулярной генетики и понимание исключительной важности генетического кода как объединяющего начала всех живых организмов привели к тому, что водораздел между живым и неживым веществом можно теперь проводить по критерию наличия или отсутствия в природном объекте работающей системы генетического

кода с молекулами ДНК и РНК.

Возникло даже новое определение самой жизни: «Жизнь есть партнерство между генами и математикой» (Stewart, 1999). Какая же математика состоит с генетическим кодом в партнерских отношениях и определяет структуру и свойства живого вещества? Каковы те структурные принципы генетического кода, которые накладывают свою явную или скрытую печать на все физиологические системы и процессы, передаваемые по наследству? Что вообще известно на сегодня о генетическом коде?

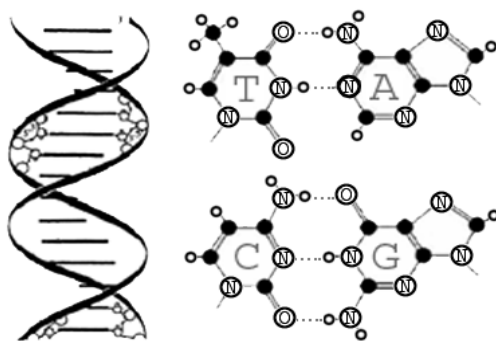


Рис. 1. Слева – двойная спираль ДНК. Справа – комплементарные пары четырех азотистых оснований в ДНК: А – Т (аденин и тимин), С – G (цитозин и гуанин). Пунктиром даны водородные связи в этих парах. Черные кружки – атомы углерода, маленькие белые кружки – водорода, кружки с буквой N – азота, кружки с буквой O – кислорода

Молекулы наследственности ДНК и РНК содержат вдоль своих нитей кодовую последовательность четырех азотистых оснований – четырех «букв» генетического алфавита: аденина А, цитозина С, гуанина G, тимина Т (или родственного ему урацила U в РНК). Поэтому распространено выражение: «энциклопедия жизни написана четырьмя буквами». Названные буквы при их расположении на противоположных нитях ДНК образуют комплементарные пары: А и Т (в РНК комплементарны А и U), соединенные двумя водородными связями; С и G, соединенные тремя водородными связями (рис. 1). Генетический код кодирует последовательности 20-ти видов аминокислот в цепевидных белках с помощью 64-х триплетов – «трехбуквенных слов», представляющих собой всевозможные комбинации из этих четырех букв типа CAG, GCT и т.д. Генетический код называется вырожденным потому, что 20 ами-

ноокислот и стоп-сигналы белкового синтеза кодируются 64-мя триплетами. В силу этого одна аминокислота, как правило, кодируется несколькими разными триплетами.

1.3. Проблема помехоустойчивости и матричные методы

Генетическое кодирование обладает поразительной помехоустойчивостью, которая позволяет в сложнейших условиях помех воспроизводить потомков, похожих на своих предков в цепи поколений, и из маленьких половых клеток производить огромные и сложные многоклеточные организмы. В технике связи аналогичные задачи помехоустойчивости передаваемой информации (например, при передаче на Землю фотографий с поверхности Марса, когда электромагнитные сигналы должны пройти миллионы километров сильных помех) решаются с помощью матричных методов представления и обработки сигналов (Ахмед, Рао, 1980; Скляр, 2003; Трахтман, 1975; Хэмминг, 1983). Подобные матричные методы представления и анализа генетического кода и генетических секвенций используются в настоящее время в так называемой «матричной генетике». Она изучает матричные формы представления систем генетического кода для раскрытия патентов живой природы в области помехоустойчивой генетической информатики и переноса этих биологических патентов в инженерные технологии и системы, в том числе мехатронные комплексы и машины с искусственным интеллектом.

Использование матричного представления и анализа генетического кода оправдано по следующим причинам:

- информация в компьютерах хранится в матричной форме;
- помехоустойчивые коды конструируются на основе матриц;
- квантовая механика, законам которой подчинены молекулы генетического кода, использует матричные операторы, связи с которыми могут быть обнаружены в матричных формах представления генетического кода; Важность матричного подхода подчеркивается тем фактом, что сама квантовая механика первоначально возникла в виде матричной механики Гейзенберга;
- комплексные и гиперкомплексные числа, которые используются в физике и математике, обладают матричными формами их представления. Понятие числа является главным понятием математики и математического естествознания. В свете этого исследование возможной связи генетического кода с многомерными числами в их матричных представлениях может привести к важным результатам;

- матричный анализ является одним из основных исследовательских инструментов в математическом естествознании. Изучение возможных аналогий между матрицами, специфическими для генетического кода, и известными матрицами из других областей науки может быть эвристичным и полезным;

- матрицы, которые представляют собой специальный вид объединения многих компонентов в единый ансамбль, подчинены определенным математическим операциям, которые диктуют существенные связи между многими компонентами. Такие связи могут быть важны, в том числе, для ансамблей генетических элементов различного уровня.

Неоспоримый приоритет по матричной генетике принадлежит отечественной науке. Первая статья на эту тему была опубликована известным физиком-теоретиком Ю.Б. Румером и его учеником Б.Г. Конопельченко в «Докладах АН СССР» в 1975 году. Ю.Б. Румер был соавтором Л.Д. Ландау по книге о теории относительности и автором ряда книг по теории симметрии и теоретической физике. В этой статье впервые четырехбуквенный алфавит генетического кода представлен в форме (2×2) -матрицы, которая возводилась во вторую кронекеровскую степень для анализа отношений симметрии в ансамбле элементов генетического кода. Через 20 с лишним лет это направление исследований по матричной генетике было успешно продолжено в отделе биомеханики ИМАШ РАН. Современное состояние этих исследований представлено в книге (Петухов, 2008).

1.4. Бинарные субалфавиты генетического алфавита

Четыре азотистые основания или буквы генетического алфавита С, А, G, U(T) представляют собой специфические полиатомные конструкции с особыми биохимическими свойствами. Набор этих четырех конструкций не совершенно разнороден, а является носителем содержательной симметрической системы различительно-объединяющих признаков (или, точнее, пар «признак-антипризнак»). Эта система пар оппозиционных признаков разбивает четырехбуквенный алфавит всеми тремя возможными способами на различные пары букв, эквивалентные по одному из этих признаков или его отсутствию.

Например, две из этих букв – С и U – эквивалентны друг другу по признаку пиримидиновости (имеют одно кольцо в их молекулярном строении), а две другие буквы – А и G – эквивалентны между собой с точки зрения его отсутствия (они имеют не одно, а два кольца, являясь пуринами). По оппозиционным признакам «кетто» или «амино» (Уотер-

мен, 1999, с.173) образуются другие пары эквивалентности: A = C и G = U. Наконец, по признаку сильных или слабых водородных связей в комплементарных парах азотистых оснований образуется третий вид пар эквивалентности: G = C (образуют комплементарную пару с тремя водородными связями) и A = U (образуют комплементарную пару с двумя связями).

В этом разбиении на эквивалентные пары по конкретному признаку каждой букве может быть приписан условно символ бинарной оппозиции: например, единицы – в случае наличия у буквы данного признака, и нуля – при его отсутствии. В результате оказывается, что «элементарный» четырехбуквенный алфавит кода содержит в себе разбиение на три бинарных субалфавита по трем биохимическим признакам, что иллюстрируется рисунком 2 (индексы у нулей и единиц идентичны номеру признака).

ПРИЗНАК	G	A	U	C	
1) Пиримидиновость (одно кольцо)	0 ₁	0 ₁	1 ₁	1 ₁	
2) Аминомутируемость	0 ₂	1 ₂	0 ₂	1 ₂	
3) Комплементарность на основе трех водородных связей	1 ₃	0 ₃	0 ₃	1 ₃	

Рис. 2. Три бинарных субалфавита по трем признакам

Средняя часть таблицы на рис. 2 показывает, что каждая буква кода имеет три «лица» или значения в трех бинарных субалфавитах по названным признакам. По каждому из признаков четырехбуквенный алфавит кода свертывается в двухбуквенный алфавит. Например, по первому признаку имеем вместо четырехбуквенного алфавита алфавит из двух букв 0₁ и 1₁, который называется автором «бинарным субалфавитом по первому признаку» (из названных трех бинарных субалфавитов по признакам вполне независимы только два). Соответственно, генетический текст в виде строчной последовательности четырех букв кода представлен тремя параллельными и различными последовательностями нулей и единиц. Тем самым в случае ДНК и РНК при учете бинарных субалфавитов мы имеем дело не с одномерной, а с многомерной информационной последовательностью.

1.5. Кронекеровские семейства генетических матриц

Исследования по матричной генетике показали эффективность представления семейств генетических мультиплетов в форме единого кронекеровского семейства генетических матриц (кратко, геноматриц) вида $P^{(n)} = [C A; U G]^{(n)}$, где C, A, G, U – азотистые основания генетического кода, а (n) – кронекеровская степень. Рис. 3 показывает первые три геноматрицы из этого кронекеровского семейства. В каждой из них все множество мультиплетов соответствующей длины в строго упорядоченном виде. Например, в матрице $P^{(3)} = [C A; U G]^{(3)}$ собраны в упорядоченном виде все 64 триплета.

В матрицах на рис. 3 указаны бинарные номера всех столбцов и строк. Эти номера образуются автоматически при чтении мультиплетов каждого столбца с точки зрения первого бинарного субалфавита, а мультиплетов каждой строки – с точки зрения второго бинарного субалфавита (см. рис. 2). Например, триплет CAU в первом субалфавите имеет бинарное побуквенное обозначение 101 (совпадает с бинарными обозначениями всех триплетов его столбца, а потому используется как номер данного столбца), а во втором субалфавите – бинарное обозначение 110 (совпадает с бинарными обозначениями всех триплетов его строки, а потому используется как ее номер и пишется курсивом). Итак, в матрицах $[C A; U G]^{(n)}$ все мультиплеты оказываются перенумерованными и упорядоченно расположенными по объективным признакам генобуков. И вся система генов переводится на язык геометрии в пространствах сообщений по аналогии с теорией дискретных сигналов.

2. ГЕНЕТИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И ЧИСЛОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА

2.1. Числовые геноматрицы и золотое сечение

Важная отличительная особенность кронекеровского произведения, применяемого для построения семейства геноматриц, связана с собственными значениями матриц (Беллман, 1976). Коль скоро собственные значения столь важны для темы кронекеровских произведений, то естественно обратиться к изучению числовых геноматриц, которые имеют собственные числа (символьные матрицы таковых не имеют). Кроме того, в теории цифровых сигналов сигналы представляются последовательностью числовых значений их амплитуды в точках отсчета (соответствующая процедура потактовой оцифровки непрерывных сигналов

	1	0
<u>1</u>	C 11	A 10
<u>0</u>	U 01	G 00

$$; P^{(2)} = P \otimes P =$$

	11	10	01	00
<u>11</u>	CC 1111 15	CA 1110 14	AC 1101 13	AA 1100 12
<u>10</u>	CU 1011 11	CG 1010 10	AU 1001 9	AG 1000 8
<u>01</u>	UC 0111 7	UA 0110 6	GC 0101 5	GA 0100 4
<u>00</u>	UU 0011 3	UG 1110 2	GU 0001 1	GG 0000 0

	111	110	101	100	011	010	001	000
<u>111</u>	CCC 111111 63	CCA 111110 62	CAC 111101 61	CAA 111100 60	ACC 111011 59	ACA 111010 58	AAC 111001 57	AAA 111000 56
<u>110</u>	CCU 110111 55	CCG 110110 54	CAU 110101 53	CAG 110100 52	ACU 110011 51	ACG 110010 50	AAU 110001 49	AAG 110000 48
<u>101</u>	CUC 101111 47	CUA 101110 46	CGC 101101 45	CGA 101100 44	AUC 101011 43	AUA 101010 42	AGC 101001 41	AGA 101000 40
<u>100</u>	CUU 100111 39	CUG 100110 38	CGU 100101 37	CGG 100100 36	AUU 100011 35	AUG 100010 34	AGU 100001 33	AGG 100000 32
<u>011</u>	UCC 011111 31	UCA 011110 30	UAC 011101 29	UAA 011100 28	GCC 011011 27	GCA 011010 26	GAC 011001 25	GAA 011000 24
<u>010</u>	UCU 010111 23	UCG 010110 22	UAU 010101 21	UAG 010100 20	GCU 010011 19	GCG 010010 18	GAU 010001 17	GAG 010000 16
<u>001</u>	UUC 001111 15	UUA 001110 14	UGC 001101 13	UGA 001100 12	GUC 001011 11	GUA 001010 10	GGC 001001 9	GGA 001000 8
<u>000</u>	UUU 000111 7	UUG 000110 6	UGU 000101 5	UGG 000100 4	GUU 000011 3	GUG 000010 2	GGU 000001 1	GGG 000000 0

Рис. 3. Начальные представители семейства геноматриц $P^{(n)} = [C A; U G]^{(n)}$ для случаев $n = 1, 2, 3$. \otimes – символ кронекеровского умножения. Указаны бинарные и десятичные номера дуплетов и триплетов, поясняемые по тексту

переводит данные сигналы в категорию дискретных). Если мы хотим использовать разнообразные методы теории сигналов в анализе системы генетического кодирования, то нам надо научиться переходить от символьных геноматриц и секвенций к их числовым аналогам.

Используемый в матричной генетике метод обеспечения такого перехода заключается в замене буквенных символов А, С, G, U(T) азотистых оснований теми или иными количественными параметрами этих оснований, которые определяют их физико-химическую роль. Например, в замене этих букв числами их атомов или водородных связей. При этом символьные геноматрицы и последовательности мультиплетов трансформируются в соответствующие числовые геноматрицы и последовательности.

В качестве конкретного примера рассмотрим матрицы водородных связей азотистых оснований кода. Водородные связи комплементарных букв кода давно подозреваются на особую информационную значимость. Кроме того, сам водород играет ведущую роль в составе нашей Вселенной, в которой на каждые 100 атомов приходится 93 атома водорода и в которой «химическое воздействие вездесущего водорода является определяющим фактором» (Поннамперума, 1977, с. 46). Поэтому изучение возможного значения водородных связей в передаче генетической информации представляет дополнительный интерес. Речь пойдет о двух и трех водородных связях (по которым $C = G = 3$, $A = U = 2$), соединяющих комплементарные пары азотистых оснований в молекулах наследственности. Заменяем каждый полиплет во всех матрицах $P^{(n)} = [C A; U G]^{(n)}$ (рис. 3) произведением чисел водородных связей его азотистых оснований. При этом, например, триплет CGA в октетной матрице $P^{(3)}$ заменяется на произведение $3 \times 3 \times 2 = 18$. В результате получаем мультипликативные числовые невырожденные матрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ (рис. 4).

Все матрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ симметричны относительно обеих диагоналей, т.е. являются бисимметрическими. В любой из матриц $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ суммы чисел в каждой ее строке и каждом ее столбце равны 5^n , а общая сумма чисел в матрице равна 10^n . Эти геноматрицы называются квинтовыми, потому что отношение $3/2$, именуемое в теории музыкальной гармонии квинтой, пронизывает эти матрицы на разных уровнях. Например, в матрице на рисунке 4.2 все четыре числа 27, 18, 12, 8 связаны отношением квинты, как и суммы чисел в ее квадрантах и субквадрантах. Мультипликативные матрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ являются невырожденными.

В биологии генетическая система отвечает за самовоспроизве-

$$P_{\text{МУЛЬТ}}^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad P_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)} = \begin{vmatrix} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ 18 & 27 & 12 & 18 & 12 & 18 & 8 & 12 \\ 18 & 12 & 27 & 18 & 12 & 8 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 18 & 27 & 8 & 12 & 12 & 18 \\ 18 & 12 & 12 & 8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 8 & 12 & 18 & 27 & 12 & 18 \\ 12 & 8 & 18 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 8 & 12 & 12 & 18 & 12 & 18 & 18 & 27 \end{vmatrix}$$

Рис. 4. Начало семейства квинтовых мультипликативных геноматриц $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$, основанного на произведении чисел водородных связей для триплетов ($C = G = 3, A = U = 2$)

дение организмов. В математике, по крайней мере, со времен Возрождения математическим символом самовоспроизведения было так называемое золотое сечение, или «божественная пропорция». Золотым сечением называется величина $\phi = (1 + 5^{0.5})/2 = 1,618\dots$. Интересно, что семейство квинтовых геноматриц $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ оказывается тесно связанным с этим самым золотым сечением. Данная связь заключается в том, что при извлечении квадратного корня из любой геноматрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ образуется «золотая» матрица $\Phi_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)} = (P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)})^{1/2}$, все элементы которой равны золотому сечению в целой степени. Образно говоря, квинтовые геноматрицы имеют скрытую подложку из золотых матриц. Рис. 5 представляет примеры такого извлечения из геноматриц $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(1)}$, $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)}$, $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)}$. Степени золотых сечений у элементов каждой матрицы соотносятся друг с другом симметричным образом. Например, для случая октетной матрицы показатели степени в ее элементах при ϕ образуют пары типа инь-ян из противоположных по знаку чисел $+1$ и -1 , $+3$ и -3 . Произведение всех чисел в любой строке и любом столбце этих золотых матриц равно единице.

Отношения между соседними по величине видами чисел во всех золотых геноматрицах равно ϕ^2 . Этот коэффициент ϕ^2 реализуется в отношениях сторон пятиконечных звезд, вписанных друг в друга (пентаграмм, являющихся древним символом здоровья).

Золотое сечение реализуется в пентасимметричных фигурах, широко представленных в живой природе и запрещенных в классической кристаллографии. Оно также представлено во многих фигурах современной обобщенной кристаллографии: квазикристаллах Шехтмана, мозаиках Пенроуза, додекаэдрах ансамблей молекул воды, фуллеренах, икосаэдрических формах некоторых вирусов и пр.

Выявленная связь золотого сечения с системой параметров генетического кода интересна потому, что множество авторов публикует данные о проявлении золотого сечения в биологических законах фило- таксиса и в различных физиологических системах: сердечно- сосудистых, дыхательных, локомоторных, электрической

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{МУЛЬТ}})^{1/2} &= \begin{vmatrix} \varphi & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi \end{vmatrix}; & (P_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)})^{1/2} &= \begin{vmatrix} \varphi^2 & \varphi^0 & \varphi^0 & \varphi^{-2} \\ \varphi^0 & \varphi^2 & \varphi^{-2} & \varphi^0 \\ \varphi^0 & \varphi^{-2} & \varphi^2 & \varphi^0 \\ \varphi^{-2} & \varphi^0 & \varphi^0 & \varphi^2 \end{vmatrix}; \\
 = \Phi_{\text{МУЛЬТ}} & & = \Phi_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)} & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)} &= \\
 = (P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)})^{1/2} &=
 \end{aligned}$$

φ^3	φ^1	φ^1	φ^{-1}	φ^1	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^{-3}
φ^1	φ^3	φ^{-1}	φ^1	φ^{-1}	φ^1	φ^{-3}	φ^{-1}
φ^1	φ^{-1}	φ^3	φ^1	φ^{-1}	φ^{-3}	φ^1	φ^{-1}
φ^{-1}	φ^1	φ^1	φ^3	φ^{-3}	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^1
φ^1	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^{-3}	φ^3	φ^1	φ^1	φ^{-1}
φ^{-1}	φ^1	φ^{-3}	φ^{-1}	φ^1	φ^3	φ^{-1}	φ^1
φ^{-1}	φ^{-3}	φ^1	φ^{-1}	φ^1	φ^{-1}	φ^3	φ^1
φ^{-3}	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^1	φ^{-1}	φ^1	φ^1	φ^3

Рис. 5. Начало семейства золотых геноматриц $(P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)})^{1/2} = \Phi_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$; φ – золотое сечение

активности мозга, психофизиологических и пр. (см., например, сайт музея золотого сечения <http://www.goldenmuseum.com/>). Пропорции золотого сечения описаны и изучаются в феноменах эстетического восприятия. В свете этого золотое сечение выступает кандидатом на роль одного из базовых элементов в феномене наследуемой сопряженности физиологических подсистем, обеспечивающей единство организма. Возможности применения золотых геноматриц для моделирования биологических систем весьма разнообразны. Оправданием такого применения служит то, что все физиологические системы обязательным образом структурно согласуются с системой генетического кода в силу необходимости быть переданными по наследству потомкам. Такое согласование является условием эволюционного выживания любых физиологических систем и внутренним камертоном согласования между ними. Оно выступает в роли внутреннего критерия естественного отбора физиологических систем. Поэтому каждая из этих систем может нести на себе печать структурных особенностей системы генетического кода, которую матричная генетика помогает увидеть.

Неожиданное проявление золотого сечения в связи с генетическим кодом и его матрицами позволяет предложить новое – матрично-генетическое – определение золотого сечения: золотое сечение и его обратная величина (ϕ и ϕ^{-1}) представляют собой единственные матричные элементы бисимметрической матрицы Φ , являющейся квадратным корнем из такой бисимметрической числовой матрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}$ второго порядка, элементами которой являются генетические числа водородных связей ($C = G = 3, A = U = 2$) и которая имеет положительный детерминант. Это определение не использует элементов классических определений золотого сечения: отрезков прямой, квадратного уравнения, предельного отношения в специальных числовых рядах. Кроме того, оно носит бинарный характер, определяя сразу системную пару взаимобратных величин ϕ и ϕ^{-1} (в разных литературных источниках золотым сечением называют или величину ϕ или обратную величину ϕ^{-1}).

Имеется огромный литературный материал о применении золотого сечения для анализа и моделирования множества природных явлений и систем – от астрономии до биологии и физики элементарных частиц. Можно полагать, что многие реализации золотого сечения в живой и неживой природе связаны именно с матричной сущностью и матричным представлением золотого сечения. Математика золотых матриц – новая математическая веточка, изучающая, в частности, рекуррентные соотношения между рядами золотых матриц, а также моделирование с их помощью природных систем и процессов.

Бисимметрические $(2^n \times 2^n)$ -матрицы типа $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ обладают инвариантно-групповыми свойствами, связанными с их коммутативным умножением. Поясним это на примере октетной геноматрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)}$ (рис. 4). Эта матрица содержит только четыре вида чисел: 8, 12, 18, 27. Каждое из чисел 8 и 27 занимает все ячейки соответствующей диагонали матрицы, а вместе совокупность ячеек этих чисел образует фигуру креста. Ячейки, занятые числом 12, образуют мозаику, напоминающую символ «69». Ячейки, занятые числом 18, образуют мозаику зеркального изображения этого символа «69». При возведении этой матрицы в любую целую или дробную степень возникает новая матрица с новой четверкой чисел, расположение которых образует ту же самую мозаику. Это свойство мозаико-инвариантности выполняется для всех бисимметрических $(2^n \times 2^n)$ -геноматриц и не зависит от величины самих чисел, а только от количества видов и характера их расположения в матрице. Свойство выполняется не только для операций возведения матрицы в степень, но и для перемножения бисимметрических матриц рассматриваемого типа с разными наборами числовых элементов, отличающихся

по величине этих элементов. Рис. 6 иллюстрирует это свойство на примере перемножения матрицы X с набором четырех элементов a, b, c, d и матрицы Y с набором других четырех элементов k, m, p, q , которое в итоге дает матрицу Z с набором новых четырех элементов g, r, v, z . Мозаика расположения четырех элементов у всех трех матриц одинакова.

d	c	c	b	c	b	b	a		q	p	p	m	p	m	m	k		z	v	v	g	v	g	g	r
c	d	b	c	b	c	a	b		p	q	m	p	m	p	k	m		v	z	g	v	g	v	r	g
c	b	d	c	b	a	c	b		p	m	q	p	m	k	p	m		v	g	z	v	g	r	v	g
b	c	c	d	a	b	b	c	*	m	p	p	q	k	m	m	p	=	g	v	v	z	r	g	g	v
c	b	b	a	d	c	c	b		p	m	m	k	q	p	p	m		v	g	g	r	z	v	v	g
b	c	a	b	c	d	b	c		m	p	k	m	p	q	m	p		g	v	r	g	v	z	g	v
b	a	c	b	c	b	d	c		m	k	p	m	p	m	q	p		g	r	v	g	v	g	z	v
a	b	b	c	b	c	c	d		k	m	m	p	m	p	p	q		r	g	g	v	g	v	v	z

$$X(a, b, c, d) \cdot Y(k, m, p, q) = Z(r, g, v, z)$$

Рис. 6. Свойство мозаико-инвариантности при перемножении матриц рассматриваемого типа

Более того, перемножение таких бисимметрических матриц типа $P_{\text{мульти}}^{(n)}$ коммутативно, то есть итоговая матрица не зависит от порядка, в каком исходные матрицы взяты в качестве сомножителей. При этом каждый из видов элементов в данных матрицах, очевидно, может быть не только вещественным числом, но также комплексным числом, произвольной функцией от времени, блочной матрицей и т.д. Это обстоятельство полезно для выбора систем базисных функций при анализе цепей дискретных сигналов с переменными параметрами как моделей биологических структур с их циклами изменчивости.

Отметим аналогию между бисимметрическими (2×2) -геноматрицами, являющимися ядрами соответствующим кронекеровских семейств матриц, и известными матрицами гиперболических поворотов, которые также бисимметричны: $[\text{sh } x \quad \text{ch } x; \text{ch } x \quad \text{sh } x]$, где $\text{sh } x$ и $\text{ch } x$ – гиперболические синус и косинус. Данная аналогия позволяет интерпретировать нормированные бисимметрические геноматрицы в связи с гиперболическими поворотами, имеющими следующие приложения в физике и математике:

- Вращение псевдо-евклидова пространства.
- Специальная теория относительности.
- Геометрическая теория логарифмов, в которой свойства логарифмов выводятся на основе гиперболических поворотов (Шерватов, 1954).

- Теория солитонов уравнения синус-Гордона (эти солитоны являются единственным релятивистским типом солитонов).

2.2. Генетические матрицы и матрицы диадических сдвигов

А существуют ли в теории связи и дискретных сигналов бисимметрические матрицы, связанные с описанными выше бисимметрическими матрицами генетического кода? Да, подобные матрицы в этой теории существуют и используются в связи с их полезными свойствами. Они лежат в основе ряда специфических методов анализа и синтеза сигналов и носят название матриц диадического сдвига (см., например, (Ахмед, Рао, 1980, с. 109)). Данные матрицы в компьютерной информатике строятся с помощью специфической для нее операции логического сложения по модулю 2 без применения операции кронекеровского умножения матриц. На рис. 7 представлен пример $(2^3 \times 2^3)$ -матрицы диадического сдвига, в каждой строке которой повторяются числа-номера ячеек в ее первой строке, но в очередности, индивидуальной для каждой строки. Именно алгоритм построения $(2^n \times 2^n)$ -матрицы диадического сдвига обуславливает эту специфическую нумерацию всех ее $(2^n \times 2^n)$ ячеек номерами из ряда чисел $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Тем самым, такая бисимметрическая матрица представляет собой матрицу особой нумерации ее ячеек, и все ее элементы принимают значения только из ряда чисел-номеров $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$.

Это отличает ее от бисимметрической $(2^n \times 2^n)$ -геноматрицы, элементы которой могут принимать иные значения. Но, если перенумеровать ячейки $(2^n \times 2^n)$ -геноматрицы (например, геноматрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)}$ на рис. 4) теми номерами, которые они имеют в аналогичной по размеру матрице диадического сдвига, то выявляется связь между этими двумя типами матриц: в этой геноматрице все ее одинаковые элементы располагаются только в тех ячейках, номера которых идентичны номерам ячеек с элементами данного вида в ее первой строке. Тем самым, зная нумерацию ячеек в $(2^n \times 2^n)$ -матрице диадического сдвига и зная характер расположения элементов в первой строке $(2^n \times 2^n)$ -геноматрицы, можно заполнить элементами все остальные строки этой геноматрицы.

Алгоритм заполнения числами ячеек в $(2^n \times 2^n)$ -матрице диадического сдвига заключается в следующем. Каждой ее строке и столбцу присваивается порядковый номер из ряда десятичных чисел $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Затем это десятичный номер заменяется эквивалентным ему числом в двоичной системе счисления. На последнем этапе в каждую ячейку вписывается сумма, получающаяся в результате поразрядного сло-

жения по модулю 2 двоичных номеров строки и столбца, на пересечении которых расположена данная ячейка. При этом

	111 (7)	110 (6)	101 (5)	100 (4)	011 (3)	010 (2)	001 (1)	000 (0)
111 (7)	0	1	2	3	4	5	6	7
110 (6)	1	0	3	2	5	4	7	6
101 (5)	2	3	0	1	6	7	4	5
100 (4)	3	2	1	0	7	6	5	4
011 (3)	4	5	6	7	0	1	2	3
010 (2)	5	4	7	6	1	0	3	2
001 (1)	6	7	4	5	2	3	0	1
000 (0)	7	6	5	4	3	2	1	0

Рис. 7. (8×8) -матрица диадического сдвига (Ахмед, Рао, 1980, с. 109). Над матрицей и слева от нее указаны двоичные (а в скобках – десятичные) номера столбцов и строк в очередности, повторяющей их очередность на рис. 3

поразрядное сложение двоичных чисел по модулю 2 осуществляется по правилам

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0 \quad (1)$$

Например, рассмотрим в матрице на рис. 7 ячейку, расположенную на пересечении столбца и строки с десятичными номерами 6 и 5 соответственно. Эквиваленты чисел 6 и 5 в двоичной системе имеют вид 110 и 101. Складывая их поразрядно по правилам (1), получаем двоичное число 011, равное десятичному числу 3, которое и записано в данной ячейке.

Отметим, что $(2^n \times 2^n)$ -матрицу диадического сдвига можно разложить на сумму 2^n разреженных матриц, имеющих следующие свойства:

- 1) каждая строка каждой из матриц состоит только из нулей и одной единицы каждая;
- 2) квадрат каждой из матриц равен единичной матрице;
- 3) каждая из этих матриц входит в названную сумму с коэффициентом, равным порядковому номеру той ячейки в первой матричной строке, в которой содержится единица (при условии, что все ячейки первой строки последовательно пронумерованы числами из ряда 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

На рис. 8 показан пример представления (4×4) -матрицы диадического сдвига (слева) в виде суммы четырех матриц названного типа. Возведение в квадрат каждой из четырех матриц в правой части выражения на этом рисунке дает единичную матрицу.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0^* \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1^* \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \\ + 2^* \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 3^* \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 8. Разложение $(2^2 \times 2^2)$ -матрицы диадического сдвига на сумму четырех базисных матриц с коэффициентами-номерами

В связи с ее свойствами каждую $(2^n \times 2^n)$ -матрицу диадического сдвига можно интерпретировать как 2^n -мерное гиперкомплексное число специального вида.

2.3. Геноматрицы, музыкальная гармония и пифагорейский музыкальный строй

Значительный интерес представляет исследование связи структурных отношений в молекулярно-генетической системе с музыкальной гармонией. Имеется целый ряд литературных данных о целесообразности изучения возможности музыкальной гармонии в живом организме. Сама мысль о возможном участии музыкальной гармонии в организации живого вещества не является новой для биофизики. Так, известный биофизик С.Э. Шноль (1989) писал: *«Из возможных следствий взаимодействия макромолекул ферментов, осуществляющих /циклические/ конформационные колебания, рассмотрим пульсации давления – звуковые волны. Диапазон чисел оборотов большинства ферментов соответствует слышимым звуковым частотам. Некую, пока еще фантастическую картину «музыкальных взаимодействий» биохимических*

систем, клеток, органов, и возможную роль этих взаимодействий в жизнедеятельности мы рассмотрим подробнее... Это наводит на приятные размышления о природе слуха, происхождении музыкального восприятия и о многом другом, что уже принадлежит области биохимической эстетики».

Мысль о связи мироустройства с принципами музыкальной гармонии относится к числу древнейших идей человечества. Наука давно занимается физиологическими механизмами восприятия музыки. Еще Аристотель пытался понять, как ритмы и мелодии, являясь лишь звуками, напоминают состояния души. Лейбниц считал музыку бессознательным упражнением души в математике. Более 30 тысяч лет назад, задолго до появления арифметики наши предки уже играли на каменных флейтах и костяных арфах. Младенцы, начиная с четырехмесячного возраста, поворачиваются к источнику приятных звуков (консонансов) и отворачиваются от неприятных (диссонансов). При этом в головном мозге человека нет специализированного центра музыки, чувство любви к музыке можно полагать рассредоточенным по всему организму. По статистике физические реакции на музыку (в виде мурашек, слез, смеха и т.д.) возникают у 80% взрослых людей. Для европейцев идея о музыкальной гармонии мироздания связана в основном с именем Пифагора и его школы. Вслед за древними восточными, прежде всего, китайскими мыслителями пифагорейцы считали, что мир устроен по принципам музыкальной гармонии, сопряженным с так называемым пифагорейским музыкальным строем (данный музыкальный строй был известен и использовался в Древнем Китае задолго до Пифагора).

Многие представители современной науки воодушевляются связью музыкальной гармонии со строением природных систем. Например, когда современная атомная физика нашла музыкальные отношения в спектральной серии Лаймана у атома водорода, то А. Эйнштейн и А. Зоммерфельд ввели в обиход характерный термин: «музыка атомных сфер». Нобелевский лауреат Р. Фейнман подчеркивал существование проблемы физиологических основ эстетики, когда писал о неясных корнях чувства музыкальной гармонии: *«Но далеко ли мы ушли от Пифагора в понимании того, почему только некоторые звуки приятны для слуха? Общая теория эстетики, по-видимому, ненамного продвинулась со времен Пифагора»* (Фейнман и др., 1965, т. 4, с. 201).

В механике давно известно, что гармонические вибрации способны производить структурно образующие и упорядочивающие влияния, ведущие, например, к образованию так называемых фигур Хладни. В книге (Jenni, 1972) представлена научная ветвь под названием «кима-

тика», занимающаяся изучением упорядочивающего действия гармонических вибраций на многие бесформенные сыпучие и жидкие субстанции. В книге приведено множество фотографий того, как эти вибрации производят в данных субстанциях красивые морфологические паттерны, включая пентасимметричные фигуры, запрещенные в классической кристаллографии. С исследованиями современных последователей пифагорейских идей о музыкальной гармонии природных систем можно познакомиться на многих сайтах Интернета, например, на сайтах <http://www.isnet-ev.de/privat/wbenz/kayser2.htm>, <http://www.sacredscience.com/archive/Kayser.htm>.

Живое вещество нередко сравнивают с кристаллами, например, Э. Шредингер называл его аperiodическим кристаллом в своей книге «Что такое жизнь с точки зрения физики». А нет ли в анналах современной науки указаний на какую-либо связь музыкальной гармонии с кристаллами? Да, они имеются. Например, они приведены в книге (Бергер, 1997, с. 270–281), где описаны утверждения классиков кристаллографии Х.С. Вейсса, Ю. Грассмана, В. Гольдшмидт, И.И. Шафрановского о параллелизмах между строением кристаллов и музыкальной гармонией. Так, академик А.Е. Ферсман писал о работах В. Гольдшмидта: *«Эти работы представляют историческую страницу в кристаллографии, которая привела Гольдшмидта к установлению им законов гармонических отношений, совершенно логически заставив перенести эти законы из мира кристаллов в мир других соотношений в мире красок, цветов, звуков и даже жизненных соотношений. Это сделалось одной из любимейших тем философских изысканий Гольдшмидта»*. И.И. Шафрановский отметил совпадение чисел пропорций в кристаллографической таблице 32-х видов симметрии с акустическими числами гармоник звука, а также соответствие расположения чисел этой таблицы определенным акустическим диапазонам. Поскольку Шредингер называл живое вещество аperiodическим кристаллом, а классики кристаллографии связывали кристаллы и музыкальную гармонию, то естественно пытаться найти следы музыкальной гармонии также в живом веществе. Музыкальный строй представляет собой последовательность числовых отношений («интервальных отношений») между частотами соседних нот (музыкальных тонов). Слово «гармония» возникло в Древней Греции в связи с пифагорейским музыкальным строем, совпадающим в основных чертах с древнекитайским музыкальным строем. Именно в античной теории музыки слово «гармония» обрело свое современное значение – согласие разногласного. Семь нот пифагорейского строя – до, ре, ми, фа, соль, ля, си – соотносятся между собой по частотам вовсе не

случайным образом, а закономерно взаимосвязаны в единый ансамбль. Действительно, семь нот пифагорейского строя, разнесенные в разные октавы, выстраиваются в единый ряд геометрической прогрессии на основе отношения квинты 3:2 между их частотами (отношения третьей и второй гармоник колеблющейся струны), что иллюстрирует рис. 9.

Фа	До	Соль	Ре	Ля	Ми	Си
87	130	196	293	440	660	990
$(3/2)^{-3}$	$(3/2)^{-2}$	$(3/2)^{-1}$	$(3/2)^0$	$(3/2)^1$	$(3/2)^2$	$(3/2)^3$

Рис. 9. Согласование частот семи нот пифагорейского музыкального строя на основе отношения квинты. Два верхних ряда показывают ноты вместе с их частотами в герцах: «фа» большой октавы, «до» и «соль» малой октавы, «ре» и «ля» первой октавы, «ми» и «си» второй октавы. Нижний ряд показывает отношение частоты каждой ноты к средней частоте этого ряда: частоте 293 Гц ноты «ре» первой октавы

Тем самым ноты пифагорейского строя образуют единый ансамбль на основе квинты 3:2 как коэффициента геометрической прогрессии. В этом ансамбле на рис. 9 отношения частот отдельных нот к средней частоте ноты «ре» первой октавы в 293 Гц образуют симметрический ряд по знакам и величинам целочисленных степеней квинты: от степени «-3» до степени «+3». Квинтовая система музыкального строя иногда полагается древнейшей из вообще известных в истории систем музыкального строя (http://www.arbuz.uz/t_octava.html).

Древние греки, как и древние китайцы, приписывали музыкальной гармонии ключевую роль в устройстве мира. Поэтому они придавали чрезвычайное значение поиску отношений квинты 3/2 в природных системах, считая 3 и 2 мужским и женским числами, которые своим взаимодействием порождают новые музыкальные тоны и пр. Так, великий математик и механик Архимед, совершивший множество открытий и изобретений, считал высшим достижением своей жизни обнаружение квинты 3/2 в соотношении объемов (и площадей) цилиндра и сферы, вписанной в него (Волошинов, 2000). Именно эти фигуры он завещал выгравировать на его могильном камне, и именно по их чертежу Цицерон обнаружил могилу Архимеда через 100 с лишним лет после смерти Архимеда.

Рассмотренные выше квинтовые геноматрицы (рис. 4) имеют выраженную связь с пифагорейским музыкальным строем. Опишем это подробнее. Семейство геноматриц $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ пронизано квинтами на раз-

ных уровнях: в отношениях сумм чисел в ряду расположенных по вертикали квадрантах, субквадрантах, субсубквадрантах и т.д., включая отношения квинты между соседними по величине числами в этих матрицах. Каждая из квинтовых геноматриц $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ (рис. 4) содержит индивидуальный набор из $(n + 1)$ видов чисел, образующих квинтовую геометрическую прогрессию. Так, $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(1)}$ содержит два вида чисел: 2 и 3; $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)}$ – три вида чисел: 4, 6, 9; $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)}$ – четыре вида чисел: 8, 12, 18, 27. Геноматрица $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(6)}$ содержит семь видов чисел: 64, 96, 144, 216, 324, 486, 729; отношения этих чисел к среднему из них числу 216 дают тот самый фрагмент квинтовой геометрической прогрессии от $(3/2)^{-3}$ до $(3/2)^3$, который представлен на рис. 9.

Выпишем эти наборы видов чисел для первых квинтовых геноматриц кронекеровского семейства $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ в столбики (см. рис. 10, слева). Справа на рис. 10 показан исторически известный числовой треугольник Платона или тетрада пифагорейцев, использованный древними греками при создании музыкального – пифагорова – строя на основе базовых пропорций из этого треугольника. По рис. 10 легко заметить аналогию между «генетическим» треугольником, отражающим систему генетических параметров, и числовым треугольником Платона (тетрадой пифагорейцев). Эта аналогия позволяет развивать представления о генетической основе эстетического восприятия музыки как последовательности «слаженных звуков».

3	9	27	81	243	1	3	9	27
2	6	18	54	162		2		
	4	12	36	108			4	
		8	24	72				8
			16	48				
				32				

Рис. 10. Слева: числовой треугольник для семейства квинтовых геноматриц на рис. 4. Справа: числовой треугольник Платона

Оказалось также, что «генетический» треугольник чисел (рис. 10, слева), полученный нами из семейства геноматриц, известен уже 2000 лет под названием числового треугольника древнегреческого математика Никомаха из Гераса. Он опубликован в его книге «Введение в арифметику» как основа пифагорейской теории музыкальной гармонии и эстетики пропорции. Этому треугольнику Никомаха посвящена статья (Karpraff, 2000). Как утверждают искусствоведы, по этому числовому треугольнику, в частности, строился Парфенон и другие великие творе-

ния зодчества с их гармонией пропорций, поскольку архитектура трактовалась как застывшая музыка, а музыка – как динамическая архитектура. (Композитор Р. Шуман писал: «Эстетика одного искусства есть эстетика и другого; только материал различен».) Данная неожиданная связь времен дополнительно подтверждает правильность излагаемого пути исследования генетической системы и ее связь с пифагорейским музыкальным строем, отраженным в треугольнике Никомаха.

Очевидно, что каждая из квинтовых последовательностей видов чисел в геноматрице $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ (рис. 4) при $n = 1, 2, \dots, 6$ может быть сопоставлена части или всей квинтовой последовательности частот музыкальных нот на рис. 9. Если, например, наименьшее число из числового набора в любой из названных геноматриц сопоставить частоте 87 Гц ноты «фа» большой октавы, то все остальные числа геноматрицы автоматически сопоставятся частотам других нот, указанных на данном рисунке. Так, последовательность чисел 8, 12, 18, 27 матрицы $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)}$ будет сопоставлена последовательности частот 87, 130, 196, 293 Гц соответствующих нот из таблицы на рис. 9. Матрица $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(6)}$ содержит семь видов чисел: 64, 96, 144, 216, 324, 486, 729. При указанном сопоставлении числа 64, как меньшего из них, с наименьшей нотной частотой 87 из рис. 9, этим семи видам чисел соответствуют все семь частот нот из этого рисунка: 87, 130, 196, 293, 440, 660, 990 Гц. В данной связи каждая матрица $P_{\text{МУЛЬТ}}^{(n)}$ при $n = 1, 2, \dots, 6$ может быть представлена в форме музыкальной матрицы $P_{\text{MUSIC}}^{(n)}$, в которой каждое число, представляющее n -плет, заменяется частотой соответствующей ноты.

Описанные исследования обращают внимание, в частности, на то, что каждый ген и каждая часть ДНК как последовательности триплетов имеют собственные числовые квинтовые последовательности в виде специфической для них очередности четырех чисел 8, 12, 18, 27. Каждое из этих чисел представляет собой произведение количества водородных связей трех букв триплета: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Отношение любых двух из этих четырех чисел равно квинте $3/2$ в той или иной целой степени. Последовательности этих четырех «водородных» чисел в каждом гене или молекуле ДНК можно сопоставить последовательность из четырех видов нот, то есть некоторую музыкальную мелодию, как это было описано выше. (Если рассматривать генетическую последовательность как последовательность пар соседних триплетов, то генетической последовательности аналогичным образом сопоставляется последовательность из семи нот пифагорейского строя.) Другими словами, каждая генетическая последовательность характеризуется своей собственной музыкальной мело-

дией, определяемой в рассматриваемом случае на параметрах водородных связей (развернутый анализ этого см. в книге (Петухов, 2008)).

Не может ли такая «натуральная генетическая музыка» обладать физиологической активностью и полезностью при воспроизведении генетических квинтовых последовательностей в виде музыкальных звуков, цветомузыкальных композиций, электрических стимулов, модулирующих лазерного луча, вибрационных тактильных сигналов и пр.? Например, в случае больных диабетом не будет ли наблюдаться лечебный эффект для них от сеансов музыкальных мелодий, соответствующих квинтовым последовательностям гена инсулина? Ответ могут дать только будущие эксперименты.

Описанная феноменологическая связь генов с пифагорейским музыкальным строем и мелодиями на его основе интересна по многим обстоятельствам. Одним из них является существование с древних времен музыкальной терапии. В настоящее время музыкальная терапия популярна во всем мире. Только «Американское общество музыкотерапевтов» объединяет 5000 членов, из которых 2700 членов сертифицировано в качестве профессионалов. Но современные музыкальные терапевты не знают о натуральной геномузыке, которая может предоставить дополнительные возможности. Прикладные исследования натуральной геномузыки должны быть ориентированы, прежде всего, не на создание приятной уху музыки, а на поиск основ целебной и физиологически действенной музыки. Эта геномузыка и композиции на ее основе должны адресоваться тем архетипам сознания и видам коллективного бессознательного, которые введены в современную науку создателем аналитической психологии К. Юнгом. Выявление формальных аналогий между генетическими структурами и музыкальной гармонией заставляет по новому воспринимать утверждение Г. Лейбница: *«Музыка есть таинственная арифметика души, которая вычисляет себя, сама того не сознавая»*. Не потому ли великие композиторы в состояниях озарения вдруг слышат готовое музыкальное произведение, что они более других способны чувствовать генетическую гармонию в самих себе? (см. (Пенроуз, 2003)).

В свете полученных данных о музыкальной гармонии в молекулярной системе генетического кода можно думать о том, что музыка является не только инструментом вызова эмоций и наслаждения, но и принципом организации и языком живой материи. Изложенные выше материалы и другие результаты наших исследований дают основания считать, что эстетические чувства и предпочтения имеют генетическую

основу и связаны с общей проблемой помехоустойчивости информационных систем.

Какова возможная причина существования музыкальных гармонических отношений в системе параметров генетических молекул? Одной из возможных причин представляется упорядочивающая роль стоячих волн, которые производят музыкальные звуки. Как известно, при использовании стоячих волн мы вводим в систему из многих частей порядок, которого прежде там не существовало (известным примером являются, например, фигуры Хладни, возникающие из песка, хаотично набросанного на тонкую пластину, при возбуждении на этой пластине стоячих волн). Биологическую эволюцию можно трактовать как процесс разворачивания и тиражирования определенных форм упорядочивания. Физические свойства стоячих волн кажутся пригодными для обеспечения подобных процессов. Кроме того, взаимодействие вибрационных гармоник, лишенное помех в виде биений, может увеличивать надежность хранения и передачи генетической информации.

2.4. О гармонии строя протонов у множества аминокислот

Могут ли музыкальные принципы организации существовать не только в молекулах ДНК, но и в других молекулярных и супрамолекулярных структурах генетической системы? В настоящее время известен ряд фактов в пользу положительного ответа на этот вопрос. Рассмотрим данные об аминокислотах и их белковых последовательностях.

Белковые последовательности аминокислот образуются унифицированным образом с помощью пептидных связей, в которых реализовано квинтовое отношение 3:2. Действительно, в пептидной связи двойная связь расположена на 60% в зоне группы C–O и на 40% в зоне группы C–N (Shults, Schirmer, 1979, Chapter 2). Этот феноменологический факт был объяснен нобелевским лауреатом Л. Полингом в его резонансной теории, которая связана с вибрационными принципами.

Обратимся теперь ко множеству 20 генетически кодируемых аминокислот, в котором природой реализована следующая последовательность чисел протонов (краткое наименование аминокислоты указано в скобках вслед за числом протонов в ней):

40 (Gly), **48** (Ala), **56** (Ser), **62** (Pro), **64** (Cys, Thr, Val),
70 (Asn, Asp), **72** (Ile, Leu), **78** (Gln, Glu), **80** (Lys, Met),
82 (His), **88** (phe), **94** (Arg), **96** (Tyr), **108** (Trp). (2)

Проанализируем этот феноменологический ряд с точки зрения учения о пифагорейской музыкальной гармонии. Известно, что базовым принципом музыкальных строев у самых разных народов в разные эпохи был принцип октавы (или октавного отношения 2:1). Описываемая протонная последовательность (2) расположена в основном внутри октавного интервала от 48 до 96. Изучим расположение всех чисел протонов в ряду (2) относительно этого октавного интервала 48–96, в котором число 48 выступает в роли музыкальной тоники. 12 видов чисел протонов из (2) лежат внутри этого интервала:

$$48, 56, 62, 64, 70, 72, 78, 80, 82, 88, 94, 96 \quad (3)$$

Пифагорейский музыкальный строй использует деление октавного интервала консонансными отношениями, прежде всего, квинтой 3:2 и квартой 4:3 (Холопов, 1988). В случае рассматриваемой протонной октавы {48, 96} квинта от тоники 48 равна 72 ($= 48 \cdot 3/2$), а кварта равна 64 ($= 48 \cdot 4/3$). Оба этих числа состоят в протонной последовательности аминокислот (3). Дополнительно, консонансное отношение 5:3, известное в теории музыки под именем большой сексты, дает еще одно число 80 из (3), поскольку $80 = 48 \cdot 5/3$.

Два протонных числа 40 и 108 из ряда (2) лежат по обеим сторонам вне рассматриваемого октавного интервала {48, 96}. Но число 40 равно $48 \cdot 5/6$, то есть число 40 связано с началом октавы консонансным отношением 5:6, известным под именем малой терции. Октавное удвоенное число 40, равное числу 80, также принадлежит протонной последовательности (3), как и положено при октавной конструкции музыкального строя. Второе лежащее вне октавы число 108 равно $96 \cdot 9/8$, т.е. число 108 связано с другим концом октавы 96 отношением 9/8, которое в пифагорейском музыкальном строе традиционно называется целым тоном.

Итак, мы имеем числовую последовательность

$$40 - 48 - 64 - 72 - 80 - 96 - 108, \quad (4)$$

члены которой взаимосвязаны музыкальными отношениями. Все четыре числа 8, 12, 18, 27, фигурирующие в квинтовой (8×8)-геноматрице триплетов $R_{\text{мульти}}^{(3)}$ (рис. 4) и отражающие особенности водородных (то есть протонных) связей комплементарных оснований А, С, G, U(T), имеют своих октавных двойников в протонной последовательности (4). Другими словами, будучи умножено на коэффициент 2 нужное число

раз, каждое из этих четырех «протонных» чисел совпадает с одним из чисел в протонной последовательности (4). Действительно, $8 \cdot 2^3 = 64$, $12 \cdot 2^2 = 48$, $18 \cdot 2^2 = 72$, $27 \cdot 2^2 = 108$. Это свидетельствует в пользу определенной координации протонных характеристик генетических компонент на разных уровнях генетической системы.

Заметим дополнительно, что большинство членов протонной последовательности аминокислот (2) имеют своим делителем число 8 и формируют непрерывную серию таких восьмикратных чисел. Действительно, $40 = 5 \cdot 8$; $48 = 6 \cdot 8$; $56 = 7 \cdot 8$; $64 = 8 \cdot 8$; $72 = 9 \cdot 8$; $80 = 10 \cdot 8$; $88 = 11 \cdot 8$; $96 = 12 \cdot 8$.

С позиций теории музыкальной гармонии протонная последовательность (4.3) имеет один дефект: анализируемый октавный интервал {48, 96} не содержит октавного двойника наибольшего числа этой последовательности 108, т.е. числа 54 (хотя эта последовательность содержит октавного двойника ее наименьшего числа 40 в виде числа 80). Почему же в ряду аминокислот генетической системы отсутствует аминокислота, содержащая 54 протона? Возможно, она была по каким-то причинам исключена в ходе биологической эволюции. Например, одной из таких причин могло быть то, что кольца каждой пары комплементарных азотистых оснований имеют именно 54 протона в их 9 атомах углерода, и повторение этой протонной характеристики в аминокислотах являлось негативным фактором для надежной эволюции. Или можно найти какой-то другой 54-протонный фактор в генетической системе, который существует для генетического набора аминокислот из-за взаимодействия с ним? Этот вопрос остается открытым. Но если допустить, что протонная последовательность аминокислот (3) дополняется числом 54, то последовательность (3) приобретает очень симметричный вид (рис. 11).

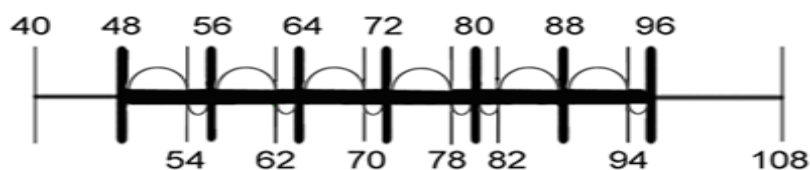


Рис. 11. Протонный строй (2) аминокислот, дополненный числом 54

3. СИММЕТРИИ ВЫРОЖДЕННОСТИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА В ЕГО МАТРИЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

3.1. Мозаичные геноматрицы вырожденности генетического кода

Генетический код называется вырожденным, поскольку 64 триплета кодируют 20 аминокислот и стоп-сигналы белкового синтеза. Современная наука знает 17 диалектов генетического кода, которые немного отличаются друг от друга по соответствию между 64 триплетами и кодируемыми ими 20 аминокислотами со стоп-сигналами (<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Taxonomy/Utils/wprintgc.cgi>). Большинство из этих диалектов (включая «универсальный» генетический код и код митохондрий позвоночных, который является наиболее симметричным среди всех диалектов) подчинено такой схеме вырожденности, в которой множество 64 триплетов поделено на два равных подмножества (рис. 12):

- стандартное для всех этих диалектов подмножество 32 триплетов с *сильными корнями* (термин Ю.Б. Румера), условно называемых черными триплетами и отличающихся тем, что кодовое значение четверки таких триплетов, совпадающих по буквам на двух первых позициях, не зависит от буквы на третьей позиции;
- стандартное для всех этих диалектов подмножество 32 триплетов со *слабыми корнями* (термин Ю.Б. Румера), условно называемых белыми триплетами и отличающихся тем, что кодовое значение четверки таких триплетов, совпадающих по буквам на двух первых позициях, зависит от буквы на третьей позиции.

Эти черные и белые триплеты расположены в геноматрице $[C A; U G]^{(3)}$ симметрическим образом, что анализируется ниже.

3.2. Связь мозаики вырожденности геноматриц с функциями Радемахера

Природой почему-то выбран такой тип вырожденности генетического кода, что эти стандартные подмножества черных и белых триплетов расположены не тривиальным симметрическим образом в генетической матрице 64 триплетов $[C A; U G]^{(3)}$ (рис. 13), причем мозаика их расположения характеризуется функциями, известными в теории связи, помехоустойчивого кодирования информации и спектральном анализе дискретных сигналов.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ (СТАНДАРТНЫЙ) ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД	
8 подсемейств триплетов с сильными корнями и аминокислоты, кодируемые ими	8 подсемейств триплетов со слабыми корнями и кодируемые аминокислоты
<u>CCC</u> , <u>CCU</u> , <u>CCA</u> , <u>CCG</u> → Pro	<u>CAC</u> , <u>CAU</u> , <u>CAA</u> , <u>CAG</u> → His, His, Gln, Gln
<u>CUC</u> , <u>CUU</u> , <u>CUA</u> , <u>CUG</u> → Leu	<u>AAC</u> , <u>AAU</u> , <u>AAA</u> , <u>AAG</u> → Asn, Asn, Lys, Lys
<u>CGC</u> , <u>CGU</u> , <u>CGA</u> , <u>CGG</u> → Arg	<u>AUC</u> , <u>AUU</u> , <u>AUA</u> , <u>AUG</u> → Ile, Ile, Ile, Met
<u>ACC</u> , <u>ACU</u> , <u>ACA</u> , <u>ACG</u> → Thr	<u>AGC</u> , <u>AGU</u> , <u>AGA</u> , <u>AGG</u> → Ser, Ser, Arg, Arg
<u>UCC</u> , <u>UCU</u> , <u>UCA</u> , <u>UCG</u> → Ser	<u>UAC</u> , <u>UAU</u> , <u>UAA</u> , <u>UAG</u> → Tyr, Tyr, Stop, Stop
<u>GCC</u> , <u>GCU</u> , <u>GCA</u> , <u>GCG</u> → Ala	<u>UUC</u> , <u>UUU</u> , <u>UUA</u> , <u>UUG</u> → Phe, Phe, Leu, Leu
<u>GUC</u> , <u>GUU</u> , <u>GUA</u> , <u>GUG</u> → Val	<u>UGC</u> , <u>UGU</u> , <u>UGA</u> , <u>UGG</u> → Cys, Cys, Stop, Trp
<u>GGC</u> , <u>GGU</u> , <u>GGA</u> , <u>GGG</u> → Gly	<u>GAC</u> , <u>GAU</u> , <u>GAA</u> , <u>GAG</u> → Asp, Asp, Glu, Glu
ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД МИТОХОНДРИЙ ПОЗВОНОЧНЫХ	
<u>CCC</u> , <u>CCU</u> , <u>CCA</u> , <u>CCG</u> → Pro	<u>CAC</u> , <u>CAU</u> , <u>CAA</u> , <u>CAG</u> → His, His, Gln, Gln
<u>CUC</u> , <u>CUU</u> , <u>CUA</u> , <u>CUG</u> → Leu	<u>AAC</u> , <u>AAU</u> , <u>AAA</u> , <u>AAG</u> → Asn, Asn, Lys, Lys
<u>CGC</u> , <u>CGU</u> , <u>CGA</u> , <u>CGG</u> → Arg	<u>AUC</u> , <u>AUU</u> , <u>AUA</u> , <u>AUG</u> → Ile, Ile, Met, Met
<u>ACC</u> , <u>ACU</u> , <u>ACA</u> , <u>ACG</u> → Thr	<u>AGC</u> , <u>AGU</u> , <u>AGA</u> , <u>AGG</u> → Ser, Ser, Stop, Stop
<u>UCC</u> , <u>UCU</u> , <u>UCA</u> , <u>UCG</u> → Ser	<u>UAC</u> , <u>UAU</u> , <u>UAA</u> , <u>UAG</u> → Tyr, Tyr, Stop, Stop
<u>GCC</u> , <u>GCU</u> , <u>GCA</u> , <u>GCG</u> → Ala	<u>UUC</u> , <u>UUU</u> , <u>UUA</u> , <u>UUG</u> → Phe, Phe, Leu, Leu
<u>GUC</u> , <u>GUU</u> , <u>GUA</u> , <u>GUG</u> → Val	<u>UGC</u> , <u>UGU</u> , <u>UGA</u> , <u>UGG</u> → Cys, Cys, Trp, Trp
<u>GGC</u> , <u>GGU</u> , <u>GGA</u> , <u>GGG</u> → Gly	<u>GAC</u> , <u>GAU</u> , <u>GAA</u> , <u>GAG</u> → Asp, Asp, Glu, Glu

Рис. 12. Примеры базисной схемы вырожденности 11 основных диалектов генетического кода, содержащей 32 черных и 32 белых триплета



Рис. 13. Базисная схема расположения черных и белых триплетов в геноматрице $[C A; U G]^{(3)}$. Справа показаны функции Радемахера, соответствующие черно-белой мозаике строк

Действительно, геноматрица $[C A; U G]^{(3)}$ на рис. 13 характеризуется симметрологической мозаикой из черных и белых ячеек:

- 1) левая и правая половины матрицы зеркально-антисимметричны по мозаике;
- 2) пары квадрантов, расположенные вдоль любой диагонали, тождественны друг другу по мозаике;
- 3) мозаика всех строк носит меандровый характер и соответствует функциям Радемахера (описывается функциями, нечетными относительно средней линии).

Напомним, что функциями Радемахера (рис. 14), которые хорошо известны в теории дискретных сигналов, называются функции вида $r_n(t) = \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, которые принимают только два значения «+1» и «-1» (здесь sign – функция знака аргумента). Эти функции образуют неполную ортогональную систему функций, причем каждая из них является *нечетной функцией* (это определяет зеркальную антисимметрию между левой и правой половинами геноматрицы). Функции Радемахера связаны с полными ортогональными системами функций Уолша и матрицами Адамара, а также кодом Грея.

При исследовании вопроса о том, почему природа выбрала для генетического кода именно такой закономерный тип вырожденности, отражающийся в этих мозаичных геноматрицах, были выявлены интересные математические свойства этих матриц. Например, каждый из возможных видов перестановок трех позиций (1-2-3, 2-3-1, 3-1-2, 3-2-1, 1-3-2, 2-1-3) во всех 64 триплетах геноматрицы $[C A; U G]^{(3)}$

приводит к своему собственному виду мозаичной геноматрицы, мозаика всех строк которой соответствует функциям Радемахера (рис. 15). Этот феномен устойчивой связи мозаичных геноматриц с функциями Радемахера реализуется не только для позиционных перестановок в триплеттах, но и для алфавитных перестановок видов букв в них типа взаимной замены букв $C \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow U \rightarrow C$ (см. в книге (Петухов, 2008)).

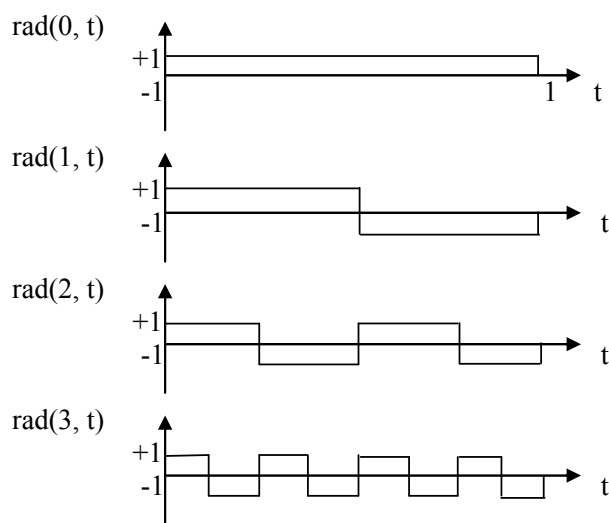


Рис. 14. Примеры функций Радемахера

Опираясь на эту устойчивую связь мозаичных геноматриц триплетов с функциями Радемахера, естественно исследовать представление символьных генетических матриц в виде числовых матриц, в которых на месте каждого черного (белого) триплета стоит число $+1$ (-1).

Оказалось, что семейства этих числовых «радемахеровских» геноматриц V_i обладают интересными алгебраическими свойствами. Например, для любой из них справедливо: $V_i^2 = 4V_i$. Другими словами, возведение в квадрат любой из этих матриц, сильно различающихся по расположению в них элементов $+1$ и -1 , приводит к ее учетверению. Это напоминает биологический феномен учетверения половых клеток, носителей генетической информации, при мейозе (делении половых клеток).

CCC	CAC	ACC	AAC	CCA	CAA	ACA	AAA
CUC	CGC	AUC	AGC	CUA	CGA	AUA	AGA
UCC	UAC	GCC	GAC	UCA	UAA	GCA	GAA
UUC	UGC	GUC	GGC	UUA	UGA	GUA	GGA
CCU	CAU	ACU	AAU	CCG	CAG	ACG	AAG
CUU	CGU	AUU	AGU	CUG	CGG	AUG	AGG
UCU	UAU	GCU	GAU	UCG	UAG	GCG	GAG
UUU	UGU	GUU	GGU	UUG	UGG	GUG	GGG

CC	CCA	ACC	ACA	CAC	CAA	AAC	AAA
CCU	CCG	ACU	ACG	CAU	CAG	AAU	AAG
UCC	UCA	GCC	GCA	UAC	UAA	GAC	GAA
UCU	UCG	GCU	GCG	UAU	UAG	GAU	GAG
CUC	CUA	AUC	AUA	CGC	CGA	AGC	AGA
CUU	CUG	AUU	AUG	CGU	CGG	AGU	AGC
UUC	UUA	GUC	GUA	UGC	UGA	GGC	GGA
UUU	UUG	GUU	GUG	UGU	UGG	GGU	GGG

CCC	ACC	CAC	AAC	CCA	ACA	CAA	AAA
UCC	GCC	UAC	GAC	UCA	GCA	UAA	GAA
CUC	AUC	CGC	AGC	CUA	AUA	CGA	AGA
UUC	GUC	UGC	GGC	UUA	GUA	UGA	GGA
CCU	ACU	CAU	AAU	CCG	ACG	CAG	AAG
UCU	GCU	UAU	GAU	UCG	GCG	UAG	GAG
CUU	AUU	CGU	AGU	CUG	AUG	CGG	AGG
UUU	GUU	UGU	GGU	UUG	GUG	UGG	GGG

CCC	ACC	CCA	ACA	CAC	AAC	CAA	AAA
UCC	GCC	UCA	GCA	UAC	GAC	UAA	GAA
CCU	ACU	CCG	ACG	CAU	AAU	CAG	AAG
UCU	GCU	UCG	GCG	UAU	GAU	UAG	GAG
CUC	AUC	CUA	AUA	CGC	AGC	CGA	AGA
UUC	GUC	UUA	GUA	UGC	GGC	UGA	GGA
CUU	AUU	CUG	AUG	CGU	AGU	CGG	AGG
UUU	GUU	UUG	GUG	UGU	GGU	UGG	GGG

Рис. 15. Примеры из семейства мозаичных геноматриц, каждый из которых соответствует одному из следующих вариантов перестановок позиций в триплеттах: (2-3-1, 2-1-3, 3-2-1, 3-1-2). Все строки этих шести геноматриц по своей мозаике соответствуют функциям Радемахера (рис. 14)

3.3. О биполярной алгебре операторов на основе радемахеровских представлений геноматриц

Рассмотрим теперь внимательнее радемахеровское представление мозаичной геноматрицы $[C A; U G]^{(3)}$ (рис. 13) в виде числовой матрицы Y_8 на рис. 16, в которой черным выделены ячейки с элементами +1. Декомпозиция этой матрицы Y_8 (рис. 16) позволяет представить ее как сумму восьми разреженных базисных матриц $f_0, m_1, f_2, m_3, f_4, m_5, f_6, m_7$, представленных на рис. 17. Неожиданным является то, что этот набор базисных матриц является замкнутым по умножению: произведение любых двух матриц из данного набора дает матрицу из этого же набора. Соответствующая таблица умножения базисных матриц дана на рис. 18.

Таким образом, можно говорить об алгебре 8-мерных геноматричных операторов $f_0, m_1, f_2, m_3, f_4, m_5, f_6, m_7$, которые относятся к типу перестановочно-сдвигавающе-инвертирующих операторов. Например, действуя на произвольный вектор $X = [x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7]$ оператором с четным индексом, например, f_2 , получаем вектор из координат с четными индексами в измененном порядке следования с частичной инвертацией знаков: $f_2 \times X = [-x_2; -x_2; x_0; x_0; -x_6; -x_6; x_4; x_4]$. При действии оператором с нечетным индексом, например, m_3 получаем аналогичное для координат с нечетными индексами: $m_3 \times X = [-x_3; -x_3; x_1; x_1; -x_7; -x_7; x_5; x_5]$. В этой алгебре операторов множество всех базисных матриц и координат разделено на два подмножества: с четными и нечетными индексами. Поэтому такие алгебры называются биполярными или чет-нечет алгебрами и т.п.

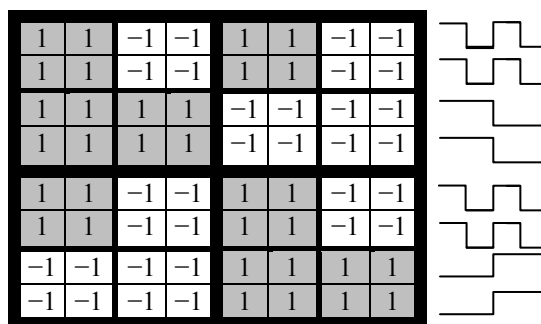


Рис. 16. Числовое представление Y_8 символьной геноматрицы $[C A; U G]^{(3)}$ на основе соответствия мозаики ее строк функциям Радемахера, принимающим только значения +1 и -1

	f_0	m_1	f_2	m_3	f_4	m_5	f_6	m_7
f_0	f_0	m_1	f_2	m_3	f_4	m_5	f_6	m_7
m_1	f_0	m_1	f_2	m_3	f_4	m_5	f_6	m_7
f_2	f_2	m_3	$-f_0$	$-m_1$	$-f_6$	$-m_7$	f_4	m_5
m_3	f_2	m_3	$-f_0$	$-m_1$	$-f_6$	$-m_7$	f_4	m_5
f_4	f_4	m_5	f_6	m_7	f_0	m_1	f_2	m_3
m_5	f_4	m_5	f_6	m_7	f_0	m_1	f_2	m_3
f_6	f_6	m_7	$-f_4$	$-m_5$	$-f_2$	$-m_3$	f_0	m_1
m_7	f_6	m_7	$-f_4$	$-m_5$	$-f_2$	$-m_3$	f_0	m_1

Рис. 18. Таблица умножения базисных матриц, показанных на рис. 17

Радемахеровские числовые представления других символьных геноматриц из упомянутых выше семейств позиционных и алфавитных перестановочных матриц также оказываются матричными формами представления биполярных алгебр операторов, имеющих другие таблицы умножения их базисных элементов.

3.4. Геноматрицы Адамара и U -алгоритм

Все эти радемахеровско-числовые геноматрицы трансформируются в матрицы Адамара, известные в теории кодирования, квантовой механике и спектральном анализе, одним и тем же простым « U -алгоритмом». Он связан с особым молекулярным статусом буквы U относительно других трех букв генетического алфавита. Этот U -алгоритм заключается в инвертации знака у элемента матричной ячейки всякий раз, когда буква U оказывается в триplete этой ячейки на нечетной позиции. Рис. 19 показывает некоторые примеры так возникающих матриц Адамара.

Обнаружение простой алгоритмической связи геноматриц с матрицами Адамара значимо потому, что в силу особых свойств последних их применению в науке и технике посвящены тысячи публикаций. Эти матрицы предоставляют эффективные возможности для организации хранения, обработки и передачи информации.

По определению матрица Адамара – квадратная матрица $H_n = \|h_{ij}\|$ порядка n , элементы h_{ij} которой суть $+1$ или -1 и для которой $H \cdot H^T = n \cdot I_n$, где H^T – транспонированная к H матрица, а I_n – единичная матрица порядка n . Все приведенные на рис. 19 матрицы удовлетворяют данному определению. Любые две строки матрицы Адамара ортогональны; если каждую строку интерпретировать как вектор, то скалярное произведение любых двух векторов-строк равняется 0. Кронекерово произведение двух любых матриц Адамара снова является матрицей

Адамара. Перестановка столбцов и строк матрицы Адамара приводит к новой матрице Адамара. Матрицы Адамара, их кронекеровские степени и нормированные аналоги с детерминантом, равным единице, широко употребляются в спектральных методах анализа и обработки дискретных сигналов и в теории квантовых компьютеров. При этом если имеется вектор \bar{a} , то его преобразование Адамара H дает вектор $\bar{u} = H \times \bar{a}$, называемый спектром Адамара. Существует большая аналогия между преобразованиями Адамара и преобразованиями Фурье (Ахмед, Рао, 1980). В частности, наряду с быстрым преобразованием Фурье активно применяется быстрое преобразование Адамара. Известен целый класс многоканальных «спектрометров с преобразованием Адамара» (Толмачев, 1976). Матрицы Адамара находят широкое применение в теории кодирования (например, с ними связан исправляющий ошибки код Рида-Маллера, коды Адамара (Питерсон, Хэлдон, 1976; Соловьева, 2006)), теории сжатия сигналов и изображений, реализации булевых функций с помощью спектральных методов, теории планирования многофакторных экспериментов (блок-схемы) и во многих других областях математики.

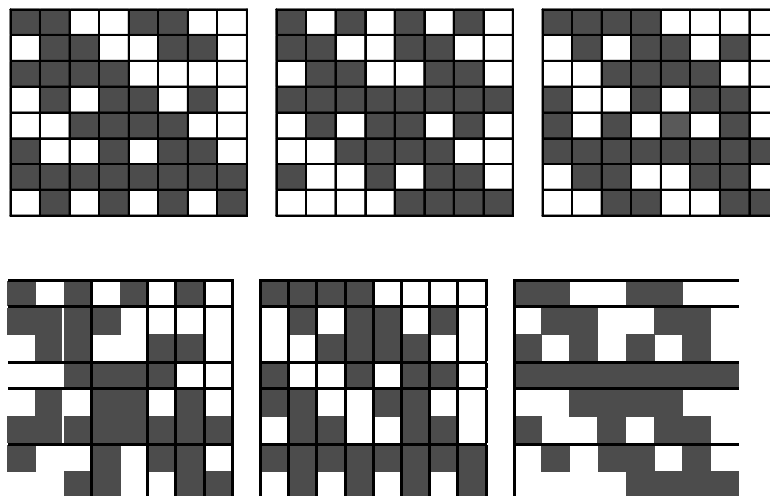


Рис. 19. Примеры геноматриц Адамара. Черные ячейки содержат элементы +1, а белые -1

Строки матриц Адамара называются функциями Уолша или функциями Адамара. Функции Уолша можно представить как результат перемножения функций Радемахера. Нормированные матрицы Адамара являются унитарными операторами и служат одним из важных инструментов создания квантовых компьютеров, которые строятся на гейтах Адамара (поскольку эволюция замкнутой квантовой системы является унитарной). Поэтому представляется перспективным осмысление принципов работы биоинформационных систем, в том числе квантово-механических систем молекулярной генетики с точки зрения квантовых компьютеров. Добавим, что ортогональные системы функций Уолша отслеживаются рядом авторов в генетически наследуемых макрофизиологических системах (Залманзон, 1989, с. 416–418).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Структурные особенности генетического кода представляют собой результат гигантского эксперимента природы по созданию самоорганизующихся и самовоспроизводящихся систем. Перед наукой стоит проблема познания системной организации молекулярных генетических ансамблей с их уникальными свойствами помехоустойчивости и репродуктивности. Сегодня последовательность азотистых оснований ДНК признается главным источником биологической информации. Поэтому во многих науках и искусствах – языкознании, музыке, психологии и пр. – предпринимаются попытки установить связь с генетическим кодом, взять его особенности за основу классификации и осмысления в своей области. Стремительное развитие технологии считывания последовательностей ДНК сделало его рутинным делом для современных лабораторий. Созданы и быстро наполняются новыми материалами огромные банки данных по последовательностям ДНК. На основе этих данных проводится сравнительный анализ самых различных живых организмов на предмет установления их эволюционного родства, выявления причин генетических заболеваний и разработки методов их лечения, клонирования организмов и пр.

Но вот как оценивают сами специалисты по генетике, сотрудники мирового банка генетических данных GenBank текущую ситуацию с последовательностями нуклеотидов в ДНК. *«Что дают нам миллионы нуклеотидов в последовательностях, известных на сегодняшний день? Мы находимся в положении Иоганна Кеплера, впервые приступающего к поиску закономерностей среди тех томов данных, которые всю жизнь собирал Тихо Браге. Мы знаем программу, запускающую клеточную механику, но мы почти ничего не знаем о том, как ее «прочитать». Биологи-практики, экспериментируя и тщательно сопоставляя*

данные, обнаружили некоторые функционально значимые участки. Теоретики, рассуждая и изучая базы данных, нашли другие, но мы все еще понимаем удручающе мало.» (Уотермен, 1999, с. 14). Исследования, представленные в данном учебном пособии, нацелены как раз на решение задачи лучшего понимания системы генетического кодирования за счет поиска познавательных форм представления данной природной системы, а также адекватных математических средств ее анализа.

История науки свидетельствует об особой важности поиска познавательных форм представления феноменологических данных, то есть свернутых и удобных для анализа форм представления бесчисленных единиц информации о природе. Все развитие математического естествознания базируется во многом на нахождении таких форм. Классическим примером служит упомянутая работа Кеплера, который, не проводя собственных астрономических наблюдений, сумел найти особую форму представления трудно обозримого множества астрономических данных о движении планет из гроссбухов Тихо Браге. Эта открытая им познавательная форма, связанная с обобщающей идеей движения по эллипсам, позволила ему сформулировать законы движения планет относительно Солнца, вошедшие в историю под именем законов Кеплера. Во многом благодаря открытию этой когнитивной формы уже другой человек – Ньютон – сформулировал много лет спустя закон всемирного тяготения.

В молекулярной генетике назрела задача поиска подобной когнитивной формы представления трудно обозримого множества единиц экспериментальной информации. В работах, представленных в данном пособии, развивается когнитивная форма представления данных о системе генетического кодирования. Эта форма основана на кронекеровских семействах математических квадратных матриц генетического алфавита и генетических мультиплетов. Она возникает естественным образом при попытках осмыслить феномен высокой помехоустойчивости генетической информации с позиций теории обеспечения помехоустойчивости в технике цифровой связи и передачи дискретных сигналов. Эта теория активно использует подобные кронекеровские семейства квадратных матриц, математику которых оказывается возможным перенести в область молекулярной генетики с ощутимой пользой. Данное заимствование из теории дискретных сигналов дополнительно оправдано дискретным характером генетического кода.

Подобные исследования в области матричной генетики, изучающей матричные формы представления генетического кода с позиций их симметрических, циклических, алгебраических и прочих свойств, приводят к новым возможностям:

- выявлению аналогий между инженерной теорией помехоустойчивого кодирования и биоинформатикой;
- поиску патентов живой природы в области помехоустойчивого кодирования для использования в инженерной информатике, теории связи и биоинформационных технологиях;
- разработке новых математических алгоритмов обработки информации, в том числе из области «генетических алгоритмов» (Фогель, Оуэнс, Уолш, 1969; Holland, 1975).
- моделированию и интерпретации феноменов генетического кодирования, включая широко распространенные в живой матери феномены циклических процессов и структур (рис. 20).



Рис. 20. Примеры циклических структур и процессов в живой природе. Справа показаны четыре ступени генетически наследуемого метаморфоза бабочки: яйцо, гусеница, кокон, взрослая бабочка

Исследования по матричной генетике нацелены на улучшение текущей ситуации с теорией генетического кодирования, которая описана ведущим специалистом в области молекулярной генетики академиком Е.Д. Свердловым (2003) так: «Главный вопрос, на который хотела бы ответить молекулярная генетика, это вопрос, задаваемый всеми поколениями мыслителей: «Что такое жизнь?»... Мы не знаем, как гены и их ансамбли формируют фенотип. Наше знание о функциях генов сегодня обычно останавливается на информации типа «ген X кодирует (или вовлечен в кодирование) признак Y»... Отсутствие информации о том, что происходит в интервале между генами и фенотипом, касается всех генов и всех признаков. Хуже всего то, что неясно, как его заполнять. Нужна новая научная революция, подобная той, которую совершила структура ДНК в генетике».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айала Ф., Кайгер Дж.* Современная генетика. В 3 т. М., 1988.
2. *Ахмед Н., Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М., 1980.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
4. *Бергер Л.Г.* Эпистемология искусства. М., 2001.
5. *Волошинов А.В.* Математика и искусство. М., 2000.
6. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других системах. М.: Наука, 1989.
7. *Конопельченко Б.Г., Румер Ю.Б.* Классификация кодонов в генетическом коде. //ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 2. С. 471–474.
8. *Пенроуз Р.* Новый ум короля. М., 2003.
9. *Петухов С.В.* Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. – М., 2008.
10. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. М., 1976.
11. *Поннамперума С.* Происхождение жизни. М.: Мир, 1977.
12. *Свердлов Е.Д.* Великое открытие: революция, канонизация, догмы и ересь //Вестник РАН. Т. 73, № 6. 2003.
13. *Скляр Б.* Цифровая связь. М., 2003.
14. *Соловьева Ф.И.* Введение в теорию кодирования. Новосибирск, 2006.
15. *Толмачев Ю.А.* Новые оптические спектрометры. Л., 1976.
16. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Советское радио, 1972.
17. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975.
18. *Уотермен М.С.*, редактор. Математические методы для анализа последовательностей ДНК. М.: Мир, 1999.
19. *Уэйнбергер Н.* Музыка и мозг //В мире науки. 2005. № 2.
20. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т.4. М.: Мир, 1965.
21. *Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М.* Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. М.: Мир, 1969.
22. *Франк-Каменецкий М.Д.* Самая главная молекула. – М, Наука, 1988.
23. *Холопов Ю.* Гармония. Теоретический курс. М., 1988.
24. *Хэмминг Р.В.* Теория кодирования и теория информации. М., 1983.

25. Чернавский Д.С. Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики //Успехи физических наук. 2000. Т. 170, № 2. С. 157–183.
26. Шерватов В.Г. Гиперболические функции. М.: ГИТТЛ, 1954.
27. Шноль С.Э. Физико-химические факторы биологической эволюции. М., 1989.
28. Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики. М, 1972.
29. Dawkins R., The blind watchmaker. N.-Y., Longman Scientific & Technical., 1990.
30. Holland J. H. Adaptation in natural and artificial systems. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
31. Jenni H. Kymatic. Berlin, Springer, 1972.
32. Kappraff J. The arithmetic of Nichomachus of Gerasa and its applications to systems of proportions. – Nexus Network Journal, v.2, # 4 (October 2000), <http://www.nexusjournal.com/Kappraff.html>.
33. Shultz G.E., Schirmer R.H. (1979) Principles of protein structure. – Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 350 p.
34. Stewart, I. Life's other secret: The new mathematics of the living world. New-York: Penguin, 1999.

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ БИОФИ-
ЗИКУ.
ЭЛЕМЕНТЫ БИОИНФОРМАТИКИ И БИО-
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Учебно-методическое пособие

Составители: *Петухов Сергей Валентинович*
Катанов Динар Шамилевич