

2ⁿ-мерные гиперболические числа в биологической информатике и алгебраической биологии

С.В. Петухов

Институт машиноведения РАН, зав. лаб. биомеханических систем.
Московская государственная консерватория
<http://petouhov.com/>

Современная наука использует различные виды многомерных чисел. Они играют роль волшебных инструментов в теориях и вычислениях в различных областях. Многими авторами высказывались мысли о математической специфичности живой материи. Так, В.И.Вернадский выдвинул гипотезу о неевклидовой геометрии живого. Представляется важной задачей исследовать, какие системы многомерных чисел имеют отношение к генетической информатике и наследуемым биологическим структурам. Автор обнаружил сопряжения системы генетического кодирования с гиперболическими числами (двойные числа, числа Лоренца и пр.). Настоящий доклад посвящен некоторым из этих сопряжений, которые ведут к мысли об алгебраической основе живой материи. Начнем с упоминания об описанных другими авторами случаев связи наследуемых биологических макроструктур с гиперболическими поворотами, являющимися частными случаями гиперболических чисел.

В биологии свыше 150 лет исследуется морфогенетический феномен существования спиральных биорешеток в формах растительных и животных организмов на самых разных линиях и ветвях биологической эволюции (законы филлотаксиса). Количественные характеристики этих биорешеток выражаются числами Фибоначчи F_n и их отношениями F_{n+1}/F_n («законы филлотаксиса»). Например, количества левых и правых спиралей в головке подсолнуха являются соседними членами ряда Фибоначчи. В процессе роста некоторых организмов их филлотаксисные решетки трансформируются с переходом к другим фибоначчивым отношениям F_{k+1}/F_k . Работы [Боднар, 1992, 1994] свидетельствуют, что эти перестройки биорешеток соответствуют гиперболическим поворотам типа преобразований Лоренца в специальной теории относительности. На этой основе Боднар заявил, что живое вещество структурно сопряжено с геометрией Минковского.

Второй пример касается врожденной способности многих организмов к локомоциям. Статья В.В. Смолянинова в “Успехах физических наук” [Смолянинов, 2000] о результатах его 20-летних исследований пространственно-временных особенностей управления локомоциями у разных видов животных и человека утверждает, что управление локомоциями сопряжено с гиперболическими поворотами и геометрией Минковского. На этой основе Смолянинов выдвинул «локомоторную теорию относительности» и писал о релятивистском мозге и релятивистской биомеханике.

Гиперболические числа и алфавиты ДНК. В центре доклада находятся 2-мерные гиперболические числа $a+bj$ ($j^2=-1$), имеющие представления в форме бисимметричных матриц ($a*[1\ 0; 0\ 1]+b*[0\ 1; 1\ 0]$), и их алгебраические расширения, называемые 2ⁿ-мерными гиперболическими числами. Матричные представления базисных единиц этих расширений определяются тензорной степенью (n) суммы базисных единиц 2-мерных чисел:

$([1\ 0; 0\ 1] + [0\ 1; 1\ 0])^{(n)}$. (Ранее в книге автора [Петухов, 2008] эти числа были названы гиперболическими матрионами).

Генетическая информация в организмах записана в длинных молекулах ДНК в тексто-подобном виде посредством всего четырех «букв»: аденина А, цитозина С, гуанина Г и тимина Т. Генетический код кодирует последовательности 20 аминокислот в белках с помощью 64 триплетов (трехбуквенных слов), то есть всех возможных комбинаций по три из четырех букв (АТС, ТТА, ...). Современная наука не знает, почему алфавит букв ДНК состоит всего из четырех весьма простых молекул А, С, G, Т. Но наука знает, что данный набор является носителем бинарно-оппозиционных индикаторов:

- 1) две из этих молекул (А и G) являются пуринами, а две другие (С и Т) – пиримидинами. С учетом этих оппозиционных индикаторов $C=T=0, A=G=1$;
- 2) две молекулы (G и Т) являются кето-молекулами, а две другие (А и С) - аминокетидинами. В силу этих оппозиционных индикаторов $A=C=0, G=T=1$.

На этой основе удобно представить наборы 4 букв ДНК, 16 дуплетов и 64 триплетов в виде квадратных таблиц, столбцы которых нумеруются оппозиционными индикаторами “пиримидин или пурин” ($C=T=0, A=G=1$), а строки – оппозиционными индикаторами “амино или кето” ($C=A=0, T=G=1$). В таких таблицах все 4 буквы, 16 дуплетов и 64 триплета автоматически занимают свое место в строгом порядке.

	0	1
0	C	A
1	T	G

	00	01	10	11
00	CC	CA	AC	AA
01	CT	CG	AT	AG
10	TC	TA	GC	GA
11	TT	TG	GT	GG

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	CCC	CCA	CAC	CAA	ACC	ACA	AAC	AAA
001	CCT	CCG	CAT	CAG	ACT	ACG	AAT	AAG
010	CTC	CTA	CGC	CGA	ATC	ATA	AGC	AGA
011	CTT	CTG	CGT	CGG	ATT	ATG	AGT	AGG
100	TCC	TCA	TAC	TAA	GCC	GCA	GAC	GAA
101	TCT	TCG	TAT	TAG	GCT	GCG	GAT	GAG
110	TTC	TTA	TGC	TGA	GTC	GTA	GGC	GGA
111	TTT	TTG	TGT	TGG	GTT	GTG	GGT	GGG

Эти три таблицы являются не просто таблицами, а членами единого тензорного (кронекеровского) семейства бисимметричных матриц: вторая и третья тензорные степени (2*2)-матрицы [C, A; T, G] автоматически дают идентичные (4*4)-матрицу 16 дуплетов и (8*8)-матрицу 64 триплетов. При формальном построении этих матриц не было сказано ни слова об аминокислотах и стоп-кодонах, кодируемых этими триплетами, но неожиданно они занимают в матрице триплетов симметричные закономерные позиции.

В двойной спирали ДНК нуклеотиды образуют комплементарные пары C-G и A-T посредством 3 и 2 водородных связей соответственно, что выражается как $C=G=3$ и $A=T=2$. При подстановке данных значений $C=G=3$ и $A=T=2$ в указанные символьные матрицы $[C, A; T, G]$, $[C, A; T, G]^{(2)}$ и $[C, A; T, G]^{(3)}$ образуются числовые матрицы $[3, 2; 2, 3]^{(n)}$ ($n=1, 2, 3$), которые являются матричными представлениями 2-, 4- и 8-мерных гиперболических чисел: $3+2j$; $9+6e_1+6e_2+4e_3$; $27e_0+18e_1+18e_2+12e_3+18e_4+12e_5+12e_6+8e_7$.

Гиперболические числа и закон Вебера-Фехнера. Различные виды наследуемого сенсорного восприятия подчиняются основному психофизическому закону Вебера-Фехнера: зрение, слух, обоняние, осязание и пр. Данный закон гласит, что интенсивность восприятия пропорциональна логарифму интенсивности стимула в соответствие с выражением $p = k \cdot \ln(x/x_0)$, где p – интенсивность восприятия, x – интенсивность стимула, x_0 – пороговое значение стимула, \ln – натуральный логарифм, k – коэффициент. Из-за этого закона сила звука в физике измеряется в логарифмической шкале децибел.

Данному закону подчиняются как высшие, так и низшие организмы, не имеющие нервной системы: «закон применим для хемотропических, гелиотропических и геотропических движений бактерий и грибов и антерозоидов папоротников, мхов и явнотропических.... Закон Вебера-Фехнера, следовательно, - не закон нервной системы и центров, но закон протоплазмы вообще и ее способности отвечать на раздражения» [Шульц, 1916, с.126].

Как известно, натуральный логарифм может быть определен для любого действительного числа a через величину площади под гиперболой $y = 1/x$ от 1 до a . Соответственно две точки данной гиперболы $(x, 1/x)$ и $(x_0, 1/x_0)$ определяют величину $\ln(x) - \ln(x_0)$, выражающую интенсивность восприятия p в законе Вебера-Фехнера. Изменение интенсивности стимула x_1 на интенсивность x_2 сопровождается сдвигом точки $(x_1, 1/x_1)$ гиперболы в новую точку $(x_2, 1/x_2)$ той же гиперболы, то есть преобразованием гиперболического поворота. При этом изменение интенсивности восприятия, описываемое соответствующим изменением площади под гиперболой, равно $\Delta p = k \cdot \ln(x_2/x_1)$ в соответствии с законом Вебера-Фехнера, который оказывается сопряженным с гиперболическим поворотом.

Гиперболические числа и процентный состав водородных связей в ДНК.

Длинные молекулы ДНК содержат многие миллионы нуклеотидов А, С, G, Т. В двойной спирали ДНК нуклеотиды связаны в комплементарные пары С-G и А-Т тремя и двумя водородными связями (С=G=3 и А=Т=2). С точки зрения последовательности этих связей любая ДНК предстает как бинарная последовательность чисел типа 33223223233... . Автором изучен процентный состав числовых связей (моноплетов, дуплетов, триплетов, тетраплетов и пентаплетов из чисел 3 и 2) в этих числовых последовательностях в длинных ДНК множества геномов различных организмов (эукариотов и прокариотов). Оказалось, что данный состав подчиняется определенным универсальным правилам и моделируется тензорным семейством матричных представлений гиперболических чисел $[\%3, \%2; \%2, \%3]^{(n)}$, где $\%3$ и $\%2$ символизируют проценты чисел 3 и 2 в длинной ДНК последовательности водородных связей, а $n=1, 2, 3, 4, 5$ [Petoukhov, 218a,b].

Гиперболические числа и длинные литературные тексты. Видные специалисты в структурной лингвистике давно пишут о том, что человеческие языки являются продолжением генетического языка с его бинарными принципами. Наши исследования текстов в романах Толстого, Достоевского, Пушкина и др. с учетом фонетических особенностей русского алфавита выявили аналогии в бинарной организации длинных генетических и литературных текстов. Эти аналогии моделируются на основе тензорного семейства матричных представлений гиперболических чисел [Petoukhov, 2018b, 219].

Гиперболические числа и музыка. Люди во все времена и во всех сообществах имели предрасположенность к музыке. Найденная археологами во Франции костяная флейта имеет возраст свыше 32000 лет. Музыковеды издавна используют одномерные числа для описания звуковых частот нот, их отношений и длительностей элементов музыки. Принимая во внимание связь генетической системы и ряда наследуемых биологических феноменов с гиперболическими числами, а также древнекитайские и древнегреческие данные о роли Инь- и Ян чисел в музыкальной гармонии, автор предложил использовать матричные представления 2^n -мерных гиперболических чисел и их базисных единиц в математическом музыковедении. Соответствующие бисимметричные матрицы имеют действительные собственные значения и

ортогональные наборы собственных векторов и сопряжены с теорией резонансов и концепцией мульти-резонансной генетики [Petoukhov, 2016]. Предложенный матричный подход дает возможность приступить к анализу нового вида музыкальной гармонии, связанному с последовательностями переходов между элементами музыкальных пьес, то есть к анализу “гармонии пластичности” пьес в дополнение к традиционной гармонии отношений звуковых частот в музыкальных строях [Petoukhov, 2019]. В ходе этих исследований сформулирована гипотеза о существовании алгебраических пралфавитов, на которые опирается вся биологическая текстовая информатика.

Известны работы по фрактальным паттернам в пространстве фиксированной (!) мерности, в том числе, на плоскости гиперболических чисел [Павлов, Панчелюга, Панчелюга, 2009]. В отличие от данных работ автором предложено итеративное репродуцирование паттернов, подобных друг другу, но расположенных на разных (!) подпространствах многомерного конфигурационного пространства, образуемого на основе тензорных произведений матричных представлений гиперболических чисел. Это позволяет моделировать поэтапное онтогенетическое развитие ряда фрактало-подобных биоструктур.

В целом полученные результаты исследований свидетельствуют в пользу организации живой материи на алгебраических основах. Они ассоциируются с утверждением Пифагора “*Числа правят миром*”.

Литература.

- Боднар О.Я.** Геометрия филлотаксиса. *Доклады Академии Наук Украины*, №9, pp. 9-15 (1992).
- Боднар О.Я.** *Золотое сечение и неевклидова геометрия в науке и искусстве.* Львов: Свит (1994).
- Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А.** О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2009, 2(12), том. 6, с. 161-175.
- Петухов С.В.** Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М., РХД (2008).
- Смолянинов В.В.** Пространственно-временные проблемы управления локомоциями.- *Успехи физических наук*, т.170, № 10, с. 1063–1128 (2000).
- Шульц Е.** Организм как творчество. - В книге «*Вопросы теории и психологии творчества*», т.7, с. 108-190, Харьков (1916).
- Petoukhov S.V.** The system-resonance approach in modeling genetic structures. *Biosystems*, v. 139, p. 1-11 (January 2016).
- Petoukhov S.V.** The Genetic Coding System and Unitary Matrices. Preprints 2018, 2018040131 (doi: 10.20944/preprints201804.0131.v2), submitted 27.09.2018. <http://www.preprints.org/manuscript/201804.0131/v2> (2018a).
- Petoukhov S.V.** Structural Connections between Long Genetic and Literary Texts. *Preprints* 2018, 2018120142, online 15 02 2019. (DOI: 10.20944/preprints201812.0142.v2) (2018b). <https://www.preprints.org/manuscript/201812.0142/v2>
- Petoukhov S.V.** Hyperbolic Numbers in Modeling Genetic Phenomena. Preprints 2019, 2019080284 (2019). doi: 10.20944/preprints201908.0284.v2, <https://www.preprints.org/manuscript/201908.0284/v2>.